http://www.xriadiat.com **DS3: M** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures (La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : (4pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$ Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $A(x)=\cos 3x-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Calculer : $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et calculer $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) En déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a) Résoudre dans $I=[-\pi;\pi]$ l'équations : $A(x)=\frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans I l'inéquation : $A(x)\leq\frac{1}{2}$

Exercice2 : (10pts) : $(1{,}\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{11u_n+4}{1-4u_n} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $-2\prec u_n\prec-\frac{1}{2}$

2) a) Vérifier que : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2(2u_n+1)(u_n+2)}{4u_n-1}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Déduire la monotonie de la suite (u_n)

3) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $s_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{u_k+2}$

a) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison q

b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n=-2+\dfrac{3}{2+4\times 3^n}$

c) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $s_n=\frac{2}{3}\left(n+3^{n+1}\right)$

4) a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}+2=\dfrac{3}{1-4\times u_n}(u_n+2)$

b) Déduire que : $u_{n+1}+2\leq\frac{3}{7}(u_n+2)$: $\forall n\in\mathbb{N}$

c) Montrer que : $0\prec u_n+2\leq\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice3 : (2pts)

Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^3}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Solution :1) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^3}\succ 0$ donc : (u_n) est croissante

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{(n^2+n+1)}{n(n+1)^3}\prec 0$$

Donc : (v_n) est décroissante.

Exercice4 : (4pts) : $(2\text{pt}+2\text{pt})$

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n-1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1) Montrer que, pour tout entier $1\leq k\leq n$: On a : $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\dfrac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\dfrac{1}{n+1}$.

2)En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\leq u_n\leq\dfrac{n}{n+1}$.

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien