http://www.xriadiat.com **DS3: L** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : $(3,5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt})$; On pose : $a=\cos\frac{\pi}{9}$ et $b=\sin\frac{\pi}{9}$

Ecrire en fonction de : a et b les expressions suivantes :

1) $A=\cos\frac{8\pi}{9}+\sin\left(-\frac{10\pi}{9}\right)$ 2) $B=\sin\frac{7\pi}{18}+\cos\frac{11\pi}{9}$ 3) $C=\sin\frac{11\pi}{18}\times\sin\frac{7\pi}{18}\times\cos\frac{8\pi}{9}$

Solution :1) $A=\cos\frac{8\pi}{9}+\sin\left(-\frac{10\pi}{9}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{9}\right)=-\cos\frac{\pi}{9}-\left(-\sin\frac{\pi}{9}\right)=-\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}$

Donc: $\boxed{A=-a+b}$

2) $B=\sin\frac{7\pi}{18}+\cos\frac{11\pi}{9}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)+\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{9}\right)=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\left(2\frac{\pi}{9}\right)$

Or on sait que : Pour tout réel x on a : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

Donc: $B=\cos\frac{\pi}{9}-\left(2\cos^2\frac{\pi}{9}-1\right)=\cos\frac{\pi}{9}-2\cos^2\frac{\pi}{9}+1$

Donc: $\boxed{B=-2a^2+a+1}$

3) $C=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)=-\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right)=\boxed{-a^3}$

Exercice2 : (4pts) : $(2\text{pt}+2\text{pt})$

Soit $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ et soit $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que : $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

1) Calculer : $\tan(2\beta)$

2) En déduire que : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$

Solution :1) On a : $\tan(2\beta)=\frac{2\tan(\beta)}{1-\tan^2(\beta)}$ $\forall\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

Or $\tan(\beta)=\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\Rightarrow\tan^2(\beta)=\frac{\sin^2(\beta)}{\cos^2(\beta)}=\frac{\sin^2(\beta)}{1-\sin^2(\beta)}=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{9}$ et comme $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

Alors : $\tan(\beta)>0$ donc : $\tan(\beta)=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

Par suite : $\tan(2\beta)=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\boxed{\frac{3}{4}}$

2) Déduisons que : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$

Calculons : $\tan(\alpha+2\beta)$

On a : $\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(2\beta)}{1-\tan(\alpha)\times\tan(2\beta)}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}}=\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}=1$

Donc : $\tan(\alpha+2\beta)=1$

Donc : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

Mais on a : $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

Donc : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ et $0<\beta<\frac{\pi}{4}$

Donc : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ et $0<2\beta<\frac{\pi}{2}$

Donc : $0<\alpha+2\beta<\pi$

Donc : $0<\frac{\pi}{4}+k\pi<\pi$ c'est-à-dire : $0<\frac{1}{4}+k<1\Leftrightarrow-\frac{1}{4}<k<\frac{3}{4}\Rightarrow\boxed{k=0}$

Par suite : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}+0\times\pi=\frac{\pi}{4}$

Exercice3 : (7pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0,5\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt}+0,5\text{pt}+0,5\text{pt}+0,5\text{pt})$

Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1\\ u_0=1\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Et soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-3$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer: u_1 ; u_2 ; v_0 et v_1

2) Montrer par récurrence que : $u_n\leq 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$

b) Ecrire v_n en fonction de n

c) En déduire u_n en fonction de n

4) On pose : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$: Calculer : S_n en fonction de n

Solution : 1) On a : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1}=\frac{2}{3}u_0+1$

Donc : $u_{0+1}=\frac{2}{3}\times1+1=\frac{2}{3}+1=\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{5}{3}$ c'est-à-dire : $u_1=\frac{5}{3}$

Pour n=1 on : $u_{1+1}=\frac{2}{3}u_1+1$ c'est-à-dire : $u_2=\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}+1=\frac{10}{9}+1=\frac{10}{9}+\frac{9}{9}=\frac{19}{9}$

On a : $v_n=u_n-3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $v_0=u_0-3=1-3$ c'est-à-dire : $v_0=-2$

Pour n=1 on : $v_1=u_1-3=\frac{5}{3}-3=\frac{5-9}{3}=\frac{-4}{3}$ c'est-à-dire : $v_1=-\frac{4}{3}$

2) Montrons que : $u_n\leq 3$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0=1\leq 3$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n\leq 3$

Montrons que : $u_{n+1}\leq 3$?

$3-u_{n+1}=3-\left(\frac{2}{3}u_n+1\right)=3-\frac{2}{3}u_n-1=2-\frac{2u_n}{3}=\frac{6-2u_n}{3}=\frac{2(3-u_n)}{3}$

On a : $u_n\leq 3$ donc $3-u_n\geq 0$

Donc : $\frac{2(3-u_n)}{3}$ c'est-à-dire : $u_{n+1}\leq 3$

Donc d'après le principe de récurrence : $u_n\leq 3$; $\forall n\in\mathbb{N}$

3)a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+1-u_n=\frac{2u_n+3-3u_n}{3}=\frac{-u_n+3}{3}$ donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{3-u_n}{3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

On a : $u_n\leq 3$ donc : $3-u_n\geq 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{3-u_n}{3}\geq 0$ c'est-à-dire : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc : $u_0\leq u_1\leq u_2\leq ....\leq u_n$

Donc : $u_0\leq u_n$

Donc : $1\leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3 car $u_n\leq 3$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 car $1\leq u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

3) a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$?

$v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{2}{3}u_n+1-3=\frac{2}{3}u_n-2$

$v_{n+1}=\frac{2u_n-6}{3}=\frac{2(u_n-3)}{3}=\frac{2}{3}(u_n-3)$ Donc : $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q=\frac{2}{3}$ et son premier terme : $v_0=-2$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q=\frac{2}{3}$ et son premier terme : $v_0=-2$

Alors : $v_n=v_0\times q^n=(-2)\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=-2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) On a : $v_n=u_n-3\Leftrightarrow v_n+3=u_n$ et on a : $v_n=-2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc : $u_n=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice4: (6pts) : $(1\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\frac{1}{x+1}$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

2) On pose : $\alpha_n=u_{2n+1}$ et $\beta_n=u_{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante

b) Montrer que : $\alpha_n\leq\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$

4) Montrer que : $|u_{n+1}-u_n|\leq\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Solution :1) Soit : $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x_1\leq x_2$

$x_1\leq x_2\Rightarrow x_1+1\leq x_2+1\Rightarrow\frac{1}{x_1+1}\geq\frac{1}{x_2+1}\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$

Donc f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$

2) On a : $\alpha_n=u_{2n+1}$ et $\beta_n=u_{2n}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $\alpha_{n+1}=(f\circ f)(\alpha_n)$ et $\beta_{n+1}=(f\circ f)(\beta_n)$

Et puisque f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$ alors : $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$

a) Montrons que : $\alpha_n\leq\alpha_n+1$ et $\beta_{n+1}\leq\beta_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a : $\alpha_0=\frac{1}{2}\leq\alpha_1=\frac{3}{5}$ et $\beta_1=\frac{2}{3}\leq\beta_0=1$

On suppose que : $\alpha_n\leq\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\leq\beta_n$

Montrons que : $\alpha_{n+1}\leq\alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2}\leq\beta_{n+1}$?

On a : $\alpha_n\leq\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\leq\beta_n$ et puisque $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$

Alors :$(f\circ f)(\alpha_n)\leq(f\circ f)(\alpha_{n+1})$ et $(f\circ f)(\beta_{n+1})\leq(f\circ f)(\beta_n)$

Donc : $\alpha_{n+1}\leq\alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2}\leq\beta_{n+1}$

Donc : $\alpha_n\leq\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\leq\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante

b) Montrons que : $\alpha_n\leq\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a : $\alpha_0=\frac{1}{2}$ et $\beta_1=1$ donc : $\alpha_0\leq\beta_0$

On suppose que : $\alpha_n\leq\beta_n$

Montrons que : $\alpha_{n+1}\leq\beta_{n+1}$?

On a : $\alpha_n\leq\beta_n$ et puisque $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$ alors : $(f\circ f)(\alpha_n)\leq(f\circ f)(\beta_n)$

Donc : $\alpha_{n+1}\leq\beta_{n+1}$ donc : $\alpha_n\leq\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrons que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$

Puisque : $\alpha_0\leq\alpha_n\leq\beta_n\leq\beta_0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

Donc : $\frac{1}{2}\leq u_{2n+1}\leq u_{2n}\leq 1$

Donc : $\frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

4) Montrons que : $|u_{n+1}-u_n|\leq\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Pour n=1 on a : $|u_2-u_1|=\frac{1}{6}$ donc : $|u_2-u_1|\leq\frac{1}{1}$

On suppose que : $|u_{n+1}-u_n|\leq\frac{1}{n}$

Montrons que : $|u_{n+2}-u_{n+1}|\leq\frac{1}{n+1}$?

On a : $|u_{n+2}-u_{n+1}|=\left|\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}\right|=\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}|u_{n+1}-u_n|$

Et on a : $\frac{1}{2}\leq u_n\leq 1$ et $\frac{1}{2}\leq u_{n+1}\leq 1$ donc : $\frac{3}{2}\leq 1+u_n\leq 2$ et $\frac{3}{2}\leq 1+u_{n+1}\leq 2$

Donc : $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{u_{n+1}+1}\leq\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{u_n+1}\leq\frac{2}{3}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}\leq\frac{4}{9}$ et $|u_{n+1}-u_n|\leq\frac{1}{n}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)}|u_{n+1}-u_n|\leq\frac{4}{9n}$

Et on a : $\frac{1}{n+1}-\frac{4}{9n}=\frac{5n-4}{9n(n+1)}\succ 0$ donc : $\frac{4}{9n}\prec\frac{1}{n+1}$

Donc : $|u_{n+2}-u_{n+1}|\leq\frac{1}{n+1}$ par suite : $|u_{n+1}-u_n|\leq\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien