http://www.xriadiat.com **DS3: J** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $A(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin^2(2x)$

1) Montrer que : $A(x)$ est un réel constant

2) Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$

Solution : 1) $A(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin^2(2x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2$

$A(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\times\cos^2 x=(\sin^2 x)^2+2\sin^2 x\times\cos^2 x+(\cos^2 x)^2$

Donc : $A(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=(1)^2=1$

Donc : $A(x)$ est un réel constant

2) Résolvons dans $]-\pi;\pi[$ l'équation : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$

$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin(2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)\Leftrightarrow A(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)$

Puisque : $A(x)=1$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)\Leftrightarrow\sin(2x)=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Dans $]-\pi;\pi[$ on a : $-\pi<\frac{\pi}{4}+k\pi<\pi\Leftrightarrow-\frac{5\pi}{4}<k\pi<\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{5}{4}<k<\frac{3}{4}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=-1\ ou\ k=0$

Donc : $x=\frac{\pi}{4}\ ou\ x=\frac{-3\pi}{4}$

Donc : $S_{]-\pi;\pi[}=\left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice2 : $(4{,}5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3}\\ u_0=2\end{cases}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Et Soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1}{u_n-1}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer: u_1 ; v_0

2) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$

b) Ecrire v_n en fonction de n

c) En déduire u_n en fonction de n

d) Calculer la somme suivante : $s_n=v_0+v_1+\ldots+v_{32}$

Solution : 1) On a : $u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1}=\frac{5u_0-1}{u_0+3}$ donc : $u_1=\frac{5\times2-1}{2+3}=\frac{9}{5}$

Et on a : $v_n=\frac{1}{u_n-1}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : pour n=0 on : $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=\frac{1}{1}=1$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{5u_n-1-u_n-3}{u_n+3}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n-4}{u_n+3}}-\frac{1}{u_n-1}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0=1$

a) Ecriture de v_n en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0+nr=1+n\times\frac{1}{4}=1+\frac{n}{4}=\frac{n+4}{4}$

b) Puisque : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ donc $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ c'est-à-dire : $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

Donc : $u_n=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$

d) On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique donc : $s_n=v_0+v_1+\ldots+v_{32}=(32-0+1)\frac{v_0+v_{32}}{2}$

$s_n=33\frac{1+v_{32}}{2}$ et on a : $v_n=\frac{n+4}{4}$ donc : $v_{32}=\frac{32+4}{4}=9$

Donc : $s_n=33\frac{1+9}{2}=33\times5=165$

Exercice3 : (5pts) : $(1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt})$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_{n+2}=\frac{1}{3}(4u_{n+1}-u_n)\\ u_0=2\ ;\ u_1=3\end{cases}\forall n\in\mathbb{N}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n=u_n-u_{n-1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Calculer : u_2 ; u_3 ; v_1 et v_2

2) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) Calculer la somme : $s_n=\sum_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n$ en fonction de n

5) En déduire : u_n en fonction de n

Solution :1) On a : $u_{n+2}=\frac{1}{3}(4u_{n+1}-u_n)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 : $u_{0+2}=\frac{1}{3}(4u_{0+1}-u_0)\Rightarrow u_2=\frac{1}{3}(4u_1-u_0)\Rightarrow u_2=\frac{10}{3}$

Pour n=1 : $u_{1+2}=\frac{1}{3}(4u_{1+1}-u_1)\Rightarrow u_3=\frac{1}{3}(4u_2-u_1)\Rightarrow u_3=\frac{31}{9}$

On a : $v_n=u_n-u_{n-1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Pour n=1 : $v_1=u_1-u_0\Rightarrow v_1=3-2\Rightarrow\boxed{v_1=1}$

Pour n=2 : $v_2=u_2-u_1\Rightarrow v_2=\frac{10}{3}-3\Rightarrow\boxed{v_2=\frac{1}{3}}$

2) Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique

On a : $v_{n+1}=u_{n+1}-u_n$ donc :

$v_{n+1}=\frac{1}{3}(4u_n-u_{n-1})-u_n=\frac{1}{3}(4u_n-u_{n-1}-3u_n)=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_{n-1})=\boxed{\frac{1}{3}v_n}$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ par suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{3}$

et de premier terme : $v_1=1$

3) Ecrivons v_n en fonction de n

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1=1$

Donc : $v_n=v_1\times q^{n-1}\Leftrightarrow\boxed{v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

4) Calculons la somme : $s_n=\sum_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n$ en fonction de n

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$; $s_n=\sum_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n=v_1\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\boxed{=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

5) Déduisons : u_n en fonction de n

On a : $s_n=v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}+v_n=(\cancel{u_1}-u_0)+(u_2-\cancel{u_1})+\ldots+(\cancel{u_{n-1}}-\cancel{u_{n-2}})+(u_n-\cancel{u_{n-1}})$

Donc : $s_n=u_n-u_0$

Donc : $u_n=s_n+u_0$ c'est-à-dire : $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+2=\boxed{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice4 : $(3{,}5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0\in\mathbb{R}$ et : $u_{n+1}=\left(1-\frac{u_n}{2}\right)u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Déterminer u_0 pour que : la suite (u_n) soit constante

2) On suppose que : $0\prec u_0\prec1$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\le u_n\le1$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

Solution : 1) Déterminons u_0 pour que : la suite (u_n) soit constante

(u_n) Constante signifie que : $u_{n+1}=u_n\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow u_n=u_0\ \forall n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow u_1=u_0$

$\Leftrightarrow\left(1-\frac{u_0}{2}\right)u_0=u_0\Leftrightarrow\left(1-\frac{u_0}{2}\right)u_0-u_0=0\Leftrightarrow u_0\left(1-\frac{u_0}{2}-1\right)=0\Leftrightarrow-\frac{u_0}{2}\times u_0=0\Leftrightarrow u_0=0$

Donc :la suite (u_n) soit constante si et seulement si : $u_0=0$

2) On suppose que : $0\prec u_0\prec1$

a) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\le u_n\le1$

1étapes : n=0 : on a : $0\prec u_0\prec1$ donc : $0\le u_0\le1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $0\le u_n\le1$

3étapes : Montrons alors que : $0\le u_{n+1}\le1$??

On a : $0\le u_n\le1$ donc : $0\le\frac{u_n}{2}\le\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{1}{2}\le1-\frac{u_n}{2}\le1$ et $0\le u_n\le1$

Donc : $0\le\left(1-\frac{u_n}{2}\right)u_n\le1$ c'est-à-dire : $0\le u_{n+1}\le1$

D'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\le u_n\le1$

b) Etudions la monotonie de la suite (u_n)

Soit : $n\in\mathbb{N}$

$u_{n+1}-u_n=\left(1-\frac{u_n}{2}\right)u_n-u_n=-\frac{(u_n)^2}{2}\le0$

Donc : la suite (u_n) est décroissante

Exercice5: (4pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$;

Soit f la fonction définie sur : $I=]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1) Montrer que : $\forall x\in I\quad f(x)\ge3$

2)Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$:($\forall n\in\mathbb{N}$)

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\ge3$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone

Solution : 1) $f(x)-3=\frac{x^2-3x+6}{x-1}-3=\frac{x^2-6x+9}{x-1}$

$f(x)-3=\frac{(x-3)^2}{x-1}\ge0\quad\forall x\in I$ car $(x-3)^2\ge0$ et $x-1\ge0\ (x\in I)$

Donc : $\forall x\in I\quad f(x)\ge3$

2)a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\ge3$?

- On a : $u_0=5\ge3$ la ppté est vraie pour n=0
- Supposons que : $u_n\ge3$
- Montrons que : $u_{n+1}\ge3$?

Comme $u_n\ge3$ alors $u_n\ge1$ donc $f(u_n)\ge3$ d'après(1) donc $u_{n+1}\ge3$ cqfd

b) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-3u_n+6}{u_n-1}-u_n=\frac{u_n^2-3u_n+6-u_n^2+u_n}{u_n-1}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{-2u_n+6}{u_n-1}=\frac{2(3-u_n)}{u_n-1}$ et comme $u_n\ge3$

Alors : $3-u_n\le0$ et $u_n-1\succ0$

Donc : $u_{n+1}-u_n\le0$ par suite : la suite (u_n) est décroissante

Exercice5 : (3pts) : $(0{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

Exercice6 : $(3{,}5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt})$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien