http://www.xriadiat.com **DS3: I** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : (2pts) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

Solution : Transformation de : $\sqrt{3}\cos x+\sin x$; $a=\sqrt{3}$ et $b=1$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Donc : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

Donc : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Après encadrement dans : $[0;2\pi]$ On trouve : $S=\left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$

Exercice2 : (4pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

Soit $x\in\mathbb{R}$

1) Factoriser les expressions suivantes : $\sin 5x-\sin 3x$ et $\sin 5x+\sin 3x$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}:\sin^2 5x-\sin^2 3x=\sin 2x\times\sin 8x$

3) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\sin^2 5x+\cos 6x-1=0$

Solution : 1) On sait que : $\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc : $\sin 5x+\sin 3x=2\sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)=2\sin(4x)\cos(x)$

Donc : $\sin 5x-\sin 3x=2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)=2\cos(4x)\sin(x)$

2) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}:\sin^2 5x-\sin^2 3x=\sin 2x\times\sin 8x$

$\sin^2 5x-\sin^2 3x=(\sin 5x+\sin 3x)(\sin 5x-\sin 3x)=2\sin(4x)\cos(x)\times 2\sin(x)\cos(4x)$

Donc : $\sin^2 5x-\sin^2 3x=2\sin(4x)\cos(4x)2\cos(x)\times\sin(x)=\sin(8x)\sin(2x)$

Car : $2\cos(X)\times\sin(X)=\sin(2X)$

3) Déduisons les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\sin^2 5x+\cos 6x-1=0$

$\cos 6x=\cos(2(3x))=\cos^2 3x-\sin^2 3x=1-2\sin^2 3x$

$2\sin^2 5x+\cos 6x-1=0\Leftrightarrow 2\sin^2 5x+1-2\sin^2 3x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 5x-2\sin^2 3x=0\Leftrightarrow\sin^2 5x-\sin^2 3x=0\Leftrightarrow\sin 2x\times\sin 8x=0$

$\Leftrightarrow\sin 2x=0$ ou $\sin 8x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi$ ou $8x=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$ ou $x=\frac{k\pi}{8}$; $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{k\pi}{2};\frac{k\pi}{8}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice3 : (2,5pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt})$ Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3

2) Calculer : $u_{n+1}-u_n$ en fonction de n , que peut -on déduire ?

3) Calculer : $u_{2n+1}-u_n$ en fonction de n

Solution : 1) Pour n=1 on a : $u_1=1\Rightarrow\boxed{u_1=1}$

Pour n=2 on a : $u_2=1+\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{u_2=\frac{3}{2}}$

Pour n=3 on a : $u_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Rightarrow\boxed{u_3=\frac{11}{6}}$

2) Soit : $n\in\mathbb{N}^*$:

$u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{n+1}}\succ 0$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

3) $u_{2n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\ldots+\frac{1}{2n+1}}$

Exercice4 : (1,5pts) ; Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $-1\le\cos n\le 1$; $\forall n\in\mathbb{N}$ et $-1\le\sin\sqrt{n}\le 1$

Donc : $1\le 2+\cos n\le 3$ et $-1\le-\sin\sqrt{n}\le 1$

Donc : $1\le 2+\cos n\le 3$ et $2\le 3-\sin\sqrt{n}\le 4$

Donc : $1\le 2+\cos n\le 3$ et $\frac{1}{4}\le\frac{1}{3-\sin\sqrt{n}}\le\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{1}{4}\le\frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}}\le\frac{3}{2}$

Cad : $\frac{1}{4}\le u_n\le\frac{3}{2}$ c'est-à-dire : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice5 : (5pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt})$; Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3} & \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0=1\end{cases}$ et Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $0\le u_n\le 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

4) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

Solution : 1) a) Montrons que : $0\le u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0=1\ge 0$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $0\le u_n$

Montrons que : $0\le u_{n+1}$?

On a : $0\le u_n$ et $u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3}$ donc $u_{n+1}\ge 0$

Donc : $0\le u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrons que : $u_n\le 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0=1\le 3$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n\le 3$

Montrons que : $u_{n+1}\le 3$?

$3-u_{n+1}=3-\frac{5u_n+3}{u_n+3}=\frac{3(u_n+3)-(5u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-2u_n+6}{u_n+3}=\frac{-2(u_n-3)}{u_n+3}$

On a : $u_n\le 3$ et $0\le u_n$ donc $3-u_{n+1}\ge 0$

Donc : $u_{n+1}\le 3$

Donc : $0\le u_n\le 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n+3}{u_n+3}-u_n=\frac{5u_n+3-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-u_n^2+2u_n+3}{u_n+3}$

On a : $0\le u_n$ donc $0\prec u_n+3$

Le signe de $u_{n+1}-u_n$ est celui de : $-u_n^2+2u_n+3$

$\Delta=4+12=16>0$ donc: $x_1=\frac{-2+4}{-2}=-1$ et $x_2=\frac{-2-4}{-2}=3$

Donc : $-u_n^2+2u_n+3=-(u_n-3)(u_n+1)$

On a : $u_n\ge 0$ donc $u_n+1\ge 0$

Et on a : $u_n\le 3$ donc : $u_n-3\le 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}\ge 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\frac{5u_n+3}{u_n+3}+1}=\frac{\frac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{5u_n+3+(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{\frac{2u_n-6}{u_n+3}}{\frac{6u_n+6}{u_n+3}}=\frac{2u_n-6}{6u_n+6}$

$v_{n+1}=\frac{2(u_n-3)}{6(u_n+1)}=\frac{1}{3}\frac{u_n-3}{u_n+1}=\frac{1}{3}v_n$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3}=q$ et son premier terme : $v_0=\frac{u_0-3}{u_0+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1$

4)puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3}=q$ et son premier terme : $v_0=-1$ alors :

$v_n=(-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tt on a : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-3\Leftrightarrow v_nu_n+v_n-u_n=-3$

$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-3-v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{-3-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n=\frac{3+v_n}{1-v_n}$ et on a : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc : $u_n=\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Exercice6 : (5pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

1) On pose : $f(x)=\frac{x^2}{1-2x^2}$: $\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

b) Montrer que : $\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$; $0\prec\frac{x^2}{1-2x^2}\prec\frac{1}{2}$

2)On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=a$ et $a\in\left]0;\frac{1}{4}\right]$: $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{1-2u_n^2}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}\le\frac{2}{7}u_n$

Solution :1) a) Montrons que : la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

On pose : $f(x)=\frac{x^2}{1-2x^2}$: $\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Soient : $x_1\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $x_2\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $x_1\prec x_2$

$0\le x_1\prec x_2\Rightarrow(x_1)^2\prec(x_2)^2\Rightarrow-2(x_1)^2+1\succ-2(x_2)^2+1\Rightarrow\frac{1}{1-2(x_1)^2}\prec\frac{1}{1-2(x_2)^2}\Rightarrow-1+\frac{1}{1-2(x_1)^2}\prec-1+\frac{1}{1-2(x_2)^2}$

$0\le x_1\prec x_2\Rightarrow f(x_1)\prec f(x_2)$

Donc : la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

b) Montrons que : $\forall x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$; $0\prec\frac{x^2}{1-2x^2}\prec\frac{1}{2}$

$\forall x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\Rightarrow 0\prec x\prec\frac{1}{2}\Rightarrow f(0)\prec f(x)\prec f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on a : $f(0)=\frac{0^2}{1-2\times 0^2}=0$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{1-2\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

Donc : $\forall x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$: $0\prec\frac{x^2}{1-2x^2}\prec\frac{1}{2}$

2)On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=a$ et $a\in\left]0;\frac{1}{4}\right]$: $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{1-2u_n^2}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$: $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$

1étapes : n=0 : $u_0=a\in\left]0;\frac{1}{4}\right]$ donc : $0\prec u_0\prec\frac{1}{4}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$

3étapes : Montrons alors que : $0\prec u_{n+1}\prec\frac{1}{4}$??

On a : $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$ et comme f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ alors : $f(0)\prec f(u_n)\prec f\left(\frac{1}{4}\right)$

Donc : $0\prec u_{n+1}\prec\frac{1}{14}\prec\frac{1}{4}$

D'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$

b) Montrons que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{1-2u_n^2}-u_n=u_n\left(\frac{u_n}{1-2u_n^2}-1\right)=\frac{2u_n(u_n+1)\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}{1-2u_n^2}$

et comme : $0\prec u_n$ et $0\prec u_n+1$ et $0\prec 1-2u_n^2$ et $u_n-\frac{1}{2}\prec 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n\prec 0$ Par conséquent (u_n) est strictement décroissante.

c) Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}\le\frac{2}{7}u_n$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}-\frac{2}{7}=\frac{u_n^2}{1-2u_n^2}-\frac{2}{7}=\frac{7u_n^2-2+4u_n^2}{7(1-2u_n^2)}=\frac{11u_n^2-2}{7(1-2u_n^2)}$

et comme : $0\prec u_n\prec\frac{1}{4}$ alors : $11u_n^2-2\prec 0$ et $0\prec 7(1-2u_n^2)$ donc : $\frac{11u_n^2-2}{7(1-2u_n^2)}\prec 0$

Donc : $u_{n+1}-\frac{2}{7}\prec 0$ par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}\le\frac{2}{7}u_n$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien