http://www.xriadiat.com **DS3: G** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : $(3{,}5\text{pts})$ $(1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

On pose : $A=\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{3\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}$

1) Monter que : $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) Monter que : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) En déduire que : $A=\frac{3}{16}$

Solution : On a : $\sin a\times\sin b=-\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$

1) $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)-\cos\left(-\frac{3\pi}{9}\right)\right)$

$\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

Donc : $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) On a : $\cos a\times\sin b=-\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)-\sin(a-b)\right)$

Donc : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) Déduction : $A=\frac{3}{16}$?

$A=\left(\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{3}{16}$

Donc : $A=\frac{3}{16}$

Exercice2 : (3pts) : $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$; Soit $x\in\left]0\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$ et on pose : $F(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\cos x\sin x}$

1) Montrer que : $F(x)=4\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin 2x}$

3) En déduire que : $F\left(\frac{\pi}{18}\right)=4$

Solution : 1) On a : $F(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\cos x\sin x}$ et on sait que : $\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$ (1)

Transformation de: $\cos x-\sqrt{3}\sin x$; $a=1$ et $b=-\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Donc : $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)$

Donc : $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ (2)

De: (1) et (2) : $F(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\cos x\sin x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=4\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2x}$

$F\left(\frac{\pi}{18}\right)=4\frac{\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(2\frac{\pi}{18}\right)}=4\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)=\sin\frac{\pi}{9}$

Donc : $F\left(\frac{\pi}{18}\right)=4\frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=4$

Exercice3 : (2pts) $(1{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt})$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\frac{5n-3}{2n+7}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minoré

Solutions : 1) Soit $n\in\mathbb{N}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{5n+2}{2n+9}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{(5n+2)(2n+7)-(2n+9)(5n-3)}{(2n+9)(2n+7)}=\frac{41}{(2n+9)(2n+7)}\succ 0$

Car : $(2n+9)(2n+7)\succ 0$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

2)Puisque : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante : $u_0\le u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et comme : $u_0=\frac{5\times 0-3}{2\times 0+7}=-\frac{3}{7}$

Alors : $-\frac{3}{7}\le u_n$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minoré par $-\frac{3}{7}$

Exercice4 : (4pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{7u_n-25}{u_n-3}\\ u_0=2\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $u_n\neq 5$; $\forall n\in\mathbb{N}$

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1}{u_n-5}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) En déduire u_n en fonction de n

5) On pose : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$; Calculer : S_n en fonction de n

Solution : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{7u_n-25}{u_n-3}\\ u_0=2\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrons que : $u_n\neq 5$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0=2\neq 5$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n\neq 5$

Montrons que : $u_{n+1}\neq 5$?

$u_{n+1}-5=\frac{7u_n-25}{u_n-3}-5=\frac{2(u_n-5)}{u_n-3}$ et comme : $u_n\neq 5$ c'est-à-dire : $u_n-5\neq 0$ alors ; $u_{n+1}-5\neq 0$

Donc d'après le principe de récurrence : $u_n\neq 5$; $\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique :

$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-5}=\frac{1}{\frac{7u_n-25}{u_n-3}-5}=\frac{u_n-3}{2(u_n-5)}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-3}{2(u_n-5)}-\frac{1}{u_n-5}=\frac{u_n-5}{2(u_n-5)}=\frac{1}{2}$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{2}$ et de premier terme : $v_0=\frac{1}{2-5}=-\frac{1}{3}$

3) Ecriture de v_n en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{2}$ et de premier terme : $v_0=-\frac{1}{3}$

Donc : $v_n=v_0+nr=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n$

4) Ecriture de u_n en fonction de n : Puisque : $v_n=\frac{1}{u_n-5}$ c'est-à-dire : $u_n=\frac{1}{v_n}+5$

Donc : $u_n=\frac{5v_n+1}{v_n}=\frac{5\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n\right)+1}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n}=\frac{15n-4}{3n-2}$

5) On pose : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$; Calculons : S_n en fonction de n

$S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}=n\frac{v_0+v_{n-1}}{2}$

On a : $v_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n\Rightarrow v_{n-1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(n-1)\Rightarrow v_{n-1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n-\frac{5}{6}$

Donc : $S_n=n\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n-\frac{5}{6}}{2}=n\frac{\frac{1}{2}n-\frac{7}{6}}{2}=\frac{n(3n-7)}{12}$

Exercice5 : $(5{,}5\text{pts})$ $(1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{n}{2(n+1)(n+2)}$ et $u_0=2$; $v_n=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2(n+1)}$

1)a) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) Ecrire u_n en fonction de n

2) a) Montrer que : $2^n\succ n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

b) Déduire que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n\prec u_n\prec\frac{2}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Solution : 1) a) Montrons que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

Soit : $n\in\mathbb{N}$ on a : $v_n=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2(n+1)}$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n+\frac{n}{2(n+1)(n+2)}\right)-\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n+\frac{n-2n-2}{2(n+1)(n+2)}\right)$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2(n+1)}\right)=\boxed{\frac{1}{2}v_n}$

Par suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme

$v_0=\frac{1}{2}u_0-\frac{1}{2(0+1)}=1-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$

Donc : $v_n=v_0\times q^n\Leftrightarrow v_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\Leftrightarrow\boxed{v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

Comme on a : $v_n=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2(n+1)}$ alors : $v_n+\frac{1}{2(n+1)}=\frac{1}{2}u_n\Leftrightarrow u_n=2v_n+\frac{1}{n+1}$

Alors : $u_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{n+1}=\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{n+1}}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

2) a) Montrons par récurrence que : $2^n\succ n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1étapes : n=1 : $2^1=2\succ 1$; Donc la proposition est vraie pour n=1

2étapes : Supposons que : $2^n\succ n$

3étapes : Montrons alors que : $2^{n+1}\succ n+1$??

On a : $2^n\succ n$ donc : $2^n\times 2\succ 2n$ c'est-à-dire : $2^{n+1}\succ 2n$ et comme : $n\ge 1$ alors : $2n\ge n+1$

Alors : $2^{n+1}\succ n+1$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $2^n\succ n$

b) Déduisons que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n\prec u_n\prec\frac{2}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$: On a : $u_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}$ et comme : $2^n\succ n$ c'est-à-dire : $\frac{1}{2^n}\prec\frac{1}{n}$ et puisque : $\frac{1}{n+1}\prec\frac{1}{n}$

Alors : $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}\prec\frac{2}{n}$ (1) et puisque : $0\prec\frac{1}{n+1}$

Donc : $\frac{1}{2^n}\prec\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}$ (2)

De : (1) et (2) en déduit que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n\prec u_n\prec\frac{2}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Exercice6 : (2pts) ; Soit les suites numériques : (x_n) et (u_n) et (v_n) définies par :

$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $u_n=x_{2n}$ et $v_n=x_{2n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie des suite (u_n) et (v_n)

Solution : $u_{n+1}-u_n=x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{1}{(2n+1)^2}-\frac{1}{(2n+2)^2}\succ 0$ Donc : (u_n) est croissante

$v_{n+1}-v_n=x_{2n+3}-x_{2n+1}=\frac{1}{(2n+3)^2}-\frac{1}{(2n+2)^2}\prec 0$

Donc : (v_n) est décroissante.

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien