 DS3: G PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : (2pts)

Montrer que : $\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x\times\tan x$

Solution : On a : $\cos 2x-\cos 4x=-2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\sin(3x)\sin x$

et $\cos 2x+\cos 4x=-2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$

Donc : $\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\frac{2\sin 3x\sin x}{2\cos 3x\cos x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\times\frac{\sin x}{\cos x}=\tan 3x\times\tan x$

car : $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

Exercice2 : (3pts) : (1,5pt+1,5pt)

1) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation : $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$

2)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation : $\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1$

Solution : *Transformation de :* $\sqrt{3}\cos x+\sin x$ $b=-1$ et $a=\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$: $-\pi\leq-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\leq-\frac{1}{2}+2k\leq 1$

Donc $-\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{3}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on trouve $x_1=-\frac{\pi}{2}$

- Encadrement de $\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$-\pi\leq\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$

Donc $-1\leq\frac{1}{6}+2k\leq 1$

Donc $-\frac{7}{6}\leq 2k\leq\frac{5}{6}$ Donc $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$

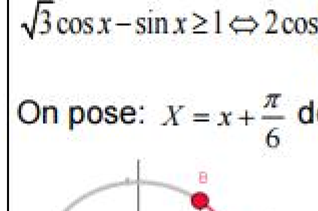
Donc $k=0$ on trouve $x_2=\frac{\pi}{6}$

Donc $S_{[-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right\}$

2) Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation : $\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1$?

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq 1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{1}{2}$

On pose: $X=x+\frac{\pi}{6}$ donc $\cos X\geq\frac{1}{2}$



$\cos X\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leq X\leq\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leq x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{6}$

$S_{[-\pi,\pi]}=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right]$

Exercice3 : (6pts) : (1pt+1,5pt+1,5pt+2pt)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

1) Déterminer : D_f le domaine de définition de la fonction f

2) Résoudre dans D_f l'équation : $f(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

3) Montrer que : $\forall x\in D_f$: $f(x)=\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$

4) Calculer : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et en déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

Solution : 1) On a $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1+\cos x\neq 0\}$

$1+\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq(2k+1)\pi\}=\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

2) Résolvons dans D_f l'équation : $f(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

$f(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\Leftrightarrow\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\Leftrightarrow 1-\cos x=(1+\cos x)\left(3-2\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow 1-3+2\sqrt{2}=\cos x+\left(3-2\sqrt{2}\right)\cos x\Leftrightarrow\cos x\left(4-2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2\Leftrightarrow\cos x=\frac{2\sqrt{2}-2}{4-2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow\cos x=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) Montrons que : $\forall x\in D_f$: $f(x)=\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$

On a : $\cos x=\cos\left(2\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $1+\cos x=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Et On a : $1-\cos x=1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2=\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$

4) Calculons : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et en déduisons que : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{6-4\sqrt{2}}{2}=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

D'autre part on a : $f(x)=\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ donc : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\tan\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)\right)^2=\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2$

Alors : $\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

Alors : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1>0$ ou $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}+1<0$ et comme $\frac{\pi}{8}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$

Par suite : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

Exercice4 : (3pts) : (1,5pt+1,5pt)

On considère la suite (u_n)définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et : $u_{n+1}=u_n+1-\sqrt{u_n^{\ 2}+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\prec u_n\prec 1$

2) Montrer que la suite (u_n)est décroissante.

Solution : On considère la suite (u_n)définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et : $u_{n+1}=u_n+1-\sqrt{u_n^{\ 2}+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\prec u_n\prec 1$

1étapes : n=0 : $u_0=\frac{1}{2}$ et $0\prec u_0\prec 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $0\prec u_n\prec 1$

3étapes : Montrons alors que : $0\prec u_{n+1}\prec 1$??

On a : $u_{n+1}=\frac{\left((u_n+1)-\sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)\left((u_n+1)+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)}{(u_n+1)+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}=\frac{(u_n+1)^2-u_n^{\ 2}-1}{(u_n+1)+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}=\frac{u_n^{\ 2}+2u_n+1-u_n^{\ 2}-1}{(u_n+1)+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}=\frac{2u_n}{(u_n+1)+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}$

et comme : $0\prec u_n\prec 1$alors : $\frac{2u_n}{(u_n+1)+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}\succ 0$ c'est-à-dire : $0\prec u_{n+1}$

On a : $u_{n+1}-1=(u_n+1)-\sqrt{u_n^{\ 2}+1}-1=u_n-\sqrt{u_n^{\ 2}+1}=\frac{\left(u_n-\sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)\left(u_n+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)}{u_n+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}=\frac{u_n^{\ 2}-u_n^{\ 2}-1}{u_n+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}=\frac{-1}{u_n+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}$

et comme : $0\prec u_n\prec 1$ alors : $\frac{-1}{u_n+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}\prec 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1}-1\prec 0$ donc : $u_{n+1}\prec 1$

Par suite : $0\prec u_{n+1}\prec 1$

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\prec u_n\prec 1$

Rq : (u_n)minorée par 0 et majorée par 1 donc ; (u_n)bornée

2) Montrons que la suite (u_n)est décroissante.

$u_{n+1}-u_n=(u_n+1)-\sqrt{u_n^{\ 2}+1}-u_n=1-\sqrt{u_n^{\ 2}+1}=\frac{\left(1-\sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)\left(1+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)}{1+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}=\frac{1-u_n^{\ 2}-1}{1+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}=\frac{-u_n^{\ 2}}{1+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}$

et comme : $0\prec u_n\prec 1$ alors : $\frac{-u_n^{\ 2}}{1+\sqrt{u_n^{\ 2}+1}}\prec 0$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}-u_n\prec 0$ par suite : la suite (u_n)est décroissante.

Exercice5 : (6pts) : (1pt+2pt+1pt+1pt+1pt)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_{n+2}=\frac{1}{3}(4u_{n+1}-u_n) & \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0=2\ ;\ u_1=3\end{cases}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n=u_n-u_{n-1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Calculer : u_2 ; u_3 ; v_1 et v_2

2) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) Calculer la somme : $s_n=\sum_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n$ en fonction de n

5) En déduire : u_n en fonction de n

Solution :1) On a : $u_{n+2}=\frac{1}{3}(4u_{n+1}-u_n)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 : $u_{0+2}=\frac{1}{3}(4u_{0+1}-u_0)\Rightarrow u_2=\frac{1}{3}(4u_1-u_0)\Rightarrow u_2=\frac{10}{3}$

Pour n=1 : $u_{1+2}=\frac{1}{3}(4u_{1+1}-u_1)\Rightarrow u_3=\frac{1}{3}(4u_2-u_1)\Rightarrow u_3=\frac{31}{9}$

On a : $v_n=u_n-u_{n-1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Pour n=1 : $v_1=u_1-u_0\Rightarrow v_1=3-2\Rightarrow\boxed{v_1=1}$

Pour n=2 : $v_2=u_2-u_1\Rightarrow v_2=\frac{10}{3}-3\Rightarrow\boxed{v_2=\frac{1}{3}}$

2) Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique

On a : $v_{n+1}=u_{n+1}-u_n$ donc : $v_{n+1}=\frac{1}{3}(4u_n-u_{n-1})-u_n=\frac{1}{3}(4u_n-u_{n-1}-3u_n)=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_{n-1})=\boxed{\frac{1}{3}v_n}$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ par suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{3}$

et de premier terme : $v_1=1$

3) Ecrivons v_n en fonction de n : On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1=1$ donc : $v_n=v_1\times q^{n-1}\Leftrightarrow\boxed{v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

4) Calculons la somme : $s_n=\sum_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n$ en fonction de n

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$; $s_n=\sum_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n=v_1\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\boxed{=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

5) Déduisons : u_n en fonction de n

On a : $s_n=v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}+v_n=\left(\cancel{u_1}-u_0\right)+\left(u_2-\cancel{u_1}\right)+\ldots+\left(\cancel{u_{n-1}}-\cancel{u_{n-2}}\right)+\left(u_n-\cancel{u_{n-1}}\right)$

Donc : $s_n=u_n-u_0$

Donc : $u_n=s_n+u_0$ c'est-à-dire : $u_n=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+2=\boxed{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien