

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Exercice1 : (3pts) : (1,5pt+1,5pt)

Montrer que : 1)  $1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$

2) si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\sin \alpha \neq -1$  alors :  $\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan^2 \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right)$

Solution : 1) On a :  $1 - \cos x + \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

Car :  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  (2) et  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$  (3)

Donc :  $1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$

2) On a :  $1 - \sin \alpha = 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$  et  $1 + \sin \alpha = 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$

Donc :  $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right)$  et  $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right)$

Donc :  $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right)$  et  $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right)$

Donc :  $\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right)}{\cos^2 \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right)} = \tan^2 \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right)$

Exercice2 : (3pts) : (1,5pt+1,5pt)

Calculer : 1)  $\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$  2)  $\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$

Solution : 1)  $\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \cos \left( \frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$

$\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \cos \pi + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$

2)  $\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \sin \left( \frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$

$\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \sin \pi + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$

<http://www.xriadiat.com>

PROF: ATMANI NAJIB

1

Exercice3 : (1,5pt) Linéariser :  $2 \cos^2 x \times \sin 2x$

Solution : 1)  $2 \cos^2 x \times \sin 2x = 2 \frac{1 + \cos 2x}{2} \times \sin 2x = (1 + \cos 2x) \times \sin 2x = \sin 2x + \sin 2x \cos 2x$

Donc :  $2 \cos^2 x \times \sin 2x = \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x$

Exercice4 : (1,5pts) : Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 3n^2 + 6n - 4$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée

Solutions : Soit  $n \in \mathbb{N}$  on a :  $u_n = 3n^2 + 6n - 4 = 3(n^2 + 2n) - 4 = 3((n+1)^2 - 1) - 4$

Donc :  $u_n = 3(n+1)^2 - 7$

On a :  $(n+1)^2 \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$

Donc :  $3(n+1)^2 \geq 0$  c'est-à-dire :  $(n+1)^2 - 7 \geq -7$

Donc :  $u_n \geq -7$  par suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par -7

Exercice5 : (3pts) : (2pt+1pt) Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique de période :  $T = 4$

2) Calculer :  $u_{2024}$  ;  $u_{2025}$

Solution : 1) Soit :  $n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = \frac{1+u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{1+\frac{1+u_n}{1-u_n}}{1-\frac{1+u_n}{1-u_n}} = -\frac{1}{u_n}$

Donc :  $u_{n+3} = \frac{1+u_{n+2}}{1-u_{n+2}} = \frac{1-\frac{1}{u_n}}{1+\frac{1}{u_n}} = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

Donc :  $u_{n+4} = \frac{1+u_{n+3}}{1-u_{n+3}} = \frac{1+\frac{u_n-1}{u_n+1}}{1-\frac{u_n-1}{u_n+1}} = \frac{2u_n}{u_n+1} = u_n$

Donc :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+4} = u_n$

Donc : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique de période :  $T = 4$

2)  $u_{2024} = u_{506 \times 4 + 0} = u_0 = 3$

Donc :  $u_{2024} = 3$

$u_{2025} = u_{506 \times 4 + 1} = u_1$

<http://www.xriadiat.com>

PROF: ATMANI NAJIB

2

Pour  $n=0$  on a :  $u_{0+1} = \frac{1+u_0}{1-u_0} = \frac{1+2}{1-2} \Rightarrow u_1 = -3$

Donc :  $u_{2025} = -3$

Exercice6 : (8pts) : (1,5pt+1,5pt+1pt+1pt+1,5pt+1,5pt)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites définies par :  $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 2 \\ v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2} u_n ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = -3 ; v_0 = 0 \end{cases}$

1) Calculer :  $u_1$  ;  $v_1$  ;  $u_2$  ; et  $v_2$

2) Montrer que :  $u_n \geq -4 : \forall n \in \mathbb{N}$  et que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

3) On pose :  $a_n = u_n + 4$  et  $b_n = v_n - u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que :  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme et écrire  $a_n$  en fonction de  $n$

b) Montrer que :  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme et écrire  $b_n$  en fonction de  $n$

c) En déduire :  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$

d) Montrer que :  $v_n > n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Solution : 1) On a :  $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 2 ; \forall n \in \mathbb{N}$

Pour  $n=0$  :  $u_{0+1} = \frac{1}{2} u_0 - 2 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} u_0 - 2 \Rightarrow u_1 = -\frac{7}{2}$

On a :  $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2} u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$

Pour  $n=0$  :  $v_{0+1} = v_0 - \frac{1}{2} u_0 \Rightarrow v_1 = v_0 - \frac{1}{2} u_0 \Rightarrow v_1 = \frac{3}{2}$

Pour  $n=1$  :  $u_{1+1} = \frac{1}{2} u_1 - 2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2} u_1 - 2 \Rightarrow u_2 = -\frac{15}{4}$

Pour  $n=1$  :  $v_{1+1} = v_1 - \frac{1}{2} u_1 \Rightarrow v_2 = v_1 - \frac{1}{2} u_1 \Rightarrow v_2 = \frac{13}{4}$

2) a) Montrons par récurrence que :  $u_n \geq -4 : \forall n \in \mathbb{N}$

1étapes :  $n=0 : u_0 = -3 \geq -4$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2étapes : Supposons que :  $u_n \geq -4$

3étapes : Montrons alors que :  $u_{n+1} \geq -4$  ??

<http://www.xriadiat.com>

PROF: ATMANI NAJIB

3

On a :  $u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2} u_n - 2 + 4 = \frac{1}{2} u_n + 2 = \frac{1}{2} (u_n + 4)$  et comme :  $u_n + 4 \geq 0$

Alors :  $u_{n+1} + 4 \geq 0$

Donc :  $u_{n+1} \geq -4$

Par suite :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq -4$

b) Montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} u_n - 2 - u_n = -\frac{1}{2} (u_n + 4)$  et comme :  $u_n + 4 \geq 0$

Alors :  $u_{n+1} - u_n \leq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

3) On pose :  $a_n = u_n + 4$  et  $b_n = v_n - u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique :

Soit :  $n \in \mathbb{N}$  ; On a :  $a_n = u_n + 4$

$a_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2} u_n - 2 + 4 = \frac{1}{2} (u_n + 4) = \frac{1}{2} a_n$

Par suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison :  $q = \frac{1}{2}$  et de premier terme

$a_0 = u_0 + 4 = -3 + 4 = 1$

Ecrivons  $a_n$  en fonction de  $n$  : comme  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison :  $q = \frac{1}{2}$  et de

premier terme  $a_0 = 1$  alors :  $a_n = a_0 \times q^n \Leftrightarrow a_n = \left( \frac{1}{2} \right)^n$

b) Montrons que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique :

Soit :  $n \in \mathbb{N}$  ; On a :  $b_n = v_n - u_n$

$b_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \left( v_n - \frac{1}{2} u_n \right) - \left( \frac{1}{2} u_n - 2 \right) = v_n - u_n - 2 = b_n - 2$

Donc :  $b_{n+1} - b_n = -2$

Par suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison :  $r = -2$  et de premier terme  $b_0 = v_0 - u_0 = 3$

Ecrivons  $b_n$  en fonction de  $n$  : comme  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison :  $r = -2$  et de

premier terme  $b_0 = 3$  alors :  $b_n = b_0 + n \times r \Leftrightarrow b_n = 3 + 2n$

c) Déduisons :  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$

On a :  $\begin{cases} a_n = u_n + 4 \\ b_n = v_n - u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n - 4 = u_n \\ b_n + u_n = v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = a_n - 4 \\ v_n = b_n + a_n - 4 \end{cases}$

<http://www.xriadiat.com>

PROF: ATMANI NAJIB

4

Donc :  $\begin{cases} u_n = \left( \frac{1}{2} \right)^n - 4 \\ v_n = 2n + \left( \frac{1}{2} \right)^n - 1 \end{cases}$

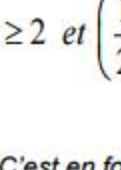
d) Montrons que :  $v_n > n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Soit :  $n \in \mathbb{N}^* : \Rightarrow n \geq 1$  et  $\left( \frac{1}{2} \right)^n > 0 \Rightarrow 2n \geq 2$  et  $\left( \frac{1}{2} \right)^n > 0 \Rightarrow n + \left( \frac{1}{2} \right)^n - 1 > 0 \Rightarrow 2n + \left( \frac{1}{2} \right)^n - 1 > n$

Donc :  $v_n > n ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

PROF: ATMANI NAJIB C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



<http://www.xriadiat.com>

PROF: ATMANI NAJIB

5