 DS3: E PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : (6 pts) : $(2pt+1pt+1,5pt+1,5pt)$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $A(x)=\cos 3x-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Calculer : $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et calculer $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) En déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a) Résoudre dans $I=[-\pi;\pi]$ l'équations : $A(x)=\frac{1}{2}$

b) Résoudre dans I l'inéquation : $A(x)\leq\frac{1}{2}$

Solution : 1) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x(2\cos^2x-1)+\sin x\times 2\cos x\sin x=2\cos^3x-\cos x-2\cos x\sin^2x$

$=2\cos^3x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2x)=2\cos^3x-\cos x-2\cos x+2\cos^2x$

$=4\cos^3x-3\cos x=\cos x(4\cos^2x-3)$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$

2) $A(x)=\cos 3x-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos^3x-3\cos x-3\sin x+3(\sin x+\cos x)=4\cos^3x$

3)a) $A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4\cos^3x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos^3x-\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)=0$

Car : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\cos^2x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\begin{cases}X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}=0\\ X=\cos x\end{cases}$

Puisque : $\Delta\prec 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc :

$A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$

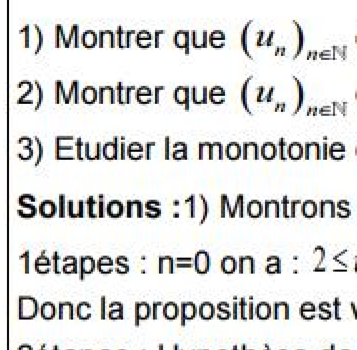
$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{[-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

3)b) $A(x)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)\leq 0$

Puisque : $\Delta\prec 0$ alors : $\cos^2x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\succ 0$

Donc : $A(x)\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x\leq\cos\frac{\pi}{3}$



Donc : $S=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice2 : (4,5pts) : $(1,5pt+1,5pt+1,5pt)$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}\quad\forall n\in\mathbb{N}\\ u_0=3\end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions :1) Montrons que $2\leq u_n\quad\forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $2\leq u_0$ car $2<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $2\leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2\leq u_{n+1}$??

$u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$

$u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ et puisque on a : $2\leq u_n$

Donc : $u_n-2\geq 0$ et $u_n+2>0$

Donc : $u_{n+1}-2\geq 0$

Donc : $2\leq u_n\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n\leq 4\quad\forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $u_0\leq 4$ car $3<4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $u_n\leq 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\leq 4$??

$4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ et puisque on a : $u_n\leq 4$

Donc : $4-u_n\geq 0$ et $u_n+2>0$

Donc $u_{n+1}\leq 4$ par suite $u_n\leq 4\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

On va factoriser $-u_n^2+6u_n-8$: $\Delta=36-32=4>0$

$x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$ donc : $-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$ Or on a : $u_n\geq 2$ et $u_n\leq 4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\geq 0$ par suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice3 : (4pts) : $(1,5pt+1pt+0,5pt+1pt)$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{2u_n-1}{u_n}\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0=2\end{cases}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1}{u_n-1}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

2) Ecrire v_n en fonction de n

3) En déduire u_n en fonction de n

4) Calculer la somme suivante : $s_n=v_0+v_1+\ldots+v_{32}$

Solution :1) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{2u_n-1}{u_n}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n}{u_n-1}-\frac{1}{u_n-1}=1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$

2) Ecriture de v_n en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0+nr=1+n\times 1=1+n$

3) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ donc $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ c'est-à-dire : $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

Donc : $u_n=\frac{v_n+1}{v_n}=\frac{1+(n+1)}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$

4) On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

Donc : $s_n=v_0+v_1+\ldots+v_{13}=(13-0+1)\frac{v_0+v_{13}}{2}$

$s_n=14\frac{1+v_{13}}{2}$ et on a : $v_n=n+1$ donc : $v_{13}=13+1=14$

Donc : $s_n=14\frac{1+14}{2}=7\times 15=105$

Exercice4 : (5,5pts) : $(2pt+1pt+1pt+1,5pt)$ Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{u_n}{3-u_n}\\ u_0=\frac{1}{2}\end{cases}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $0\prec u_n\prec 2\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ on pose : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=1+\frac{\alpha}{u_n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Déterminer la valeur de α pour l'laquelle la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique

3) On prend : $\alpha=-2$

a) Calculer : $S_n=v_3+v_4+\ldots+v_n$ en fonction de n

b) Déterminer u_n en fonction de n

Solution : 1Montrons par récurrence que : $0\prec u_n\prec 2\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0=\frac{1}{2}$ donc : $0\prec u_0\prec 2$ c'est-à-dire : a proposition vraie pour n=0

Supposons : $0\prec u_n\prec 2$

Montrons que : $0\prec u_{n+1}\prec 2$?

On a : $0\prec u_n\prec 2\Rightarrow -2\prec -u_n\prec 0\Rightarrow 1\prec 3-u_n\prec 3\Rightarrow\frac{1}{3}\prec\frac{1}{3-u_n}\prec 1$ et comme : $0\prec u_n\prec 2$

Alors : $0\times\frac{1}{3}\prec\frac{1}{3-u_n}u_n\prec 1\times 2$

Donc : $0\prec u_{n+1}\prec 2$

Donc : $0\prec u_n\prec 2\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ on pose : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=1+\frac{\alpha}{u_n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Déterminons la valeur de α pour l'laquelle la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique

On a : $v_n=1+\frac{\alpha}{u_n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $v_{n+1}=1+\frac{\alpha}{u_{n+1}}=1+\frac{\alpha}{\frac{u_n}{3-u_n}}=1+\frac{\alpha(3-u_n)}{u_n}=1+\frac{3\alpha-\alpha u_n}{u_n}=1-\alpha+3\frac{\alpha}{u_n}$ et comme : $v_n-1=\frac{\alpha}{u_n}$

Alors : $v_{n+1}=1-\alpha+3(v_n-1)\Leftrightarrow\boxed{v_{n+1}=-\alpha-2+3v_n}$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si : $-\alpha-2=0\Leftrightarrow\boxed{\alpha=-2}$

3) On prend : $\alpha=-2$

a) Calculons : $S_n=v_3+v_4+\ldots+v_n$ en fonction de n

Comme : $\alpha=-2$ alors La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $3=q$ et son premier terme :

$v_0=1+\frac{\alpha}{u_0}=1-\frac{2}{\frac{1}{2}}=1-4=-3$ et on a : $v_n=v_0\times 3^n=(-3)\times 3^n=-3^{n+1}$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc : $S_n=(le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$

$le\ nombre\ de\ termes=n-3+1=n-2$

Donc : $S_n=v_3\frac{1-3^{n-2}}{1-3}=-81\frac{1-3^{n-2}}{-2}=\boxed{\frac{81}{2}(1-3^{n-2})}$

b) Déterminons : u_n en fonction de n

On a : $v_n=1-\frac{2}{u_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$ donc : $\frac{2}{u_n}=1-v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{2}{1-v_n}$

Par suite : $\boxed{u_n=\frac{2}{1+3^{n+1}}}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien