http://www.xriadiat.com **DS3:D** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : $(4pts)$: $(2,5pt+1,5pt)$ 1) Calculer les expressions suivantes :

$A=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}$; $B=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}$

2) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\frac{7\pi}{18}$

Solution :1) On sait que : $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ (1)

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ (2)

Donc: $A=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$B=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$C=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)=-\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right)=\boxed{-a^3}$

2) Montrons que : $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\frac{7\pi}{18}$

$\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{18}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{18}\right)$

Donc: $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\right)=2\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)$

Exercice2 : $(5,5pts)$: $(1pt+2pt+2,5pt)$

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

1) Calculer : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2) Montrer que : $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations : $f(x)=0$

Solution : 1) On a : $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+2$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+2$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2$

Donc : $\boxed{f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2}$

2) Montrons que : $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)$

On a : $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

On sait que : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$

Donc : $f(x)=2\cos^2 x-1+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

D'autre part : $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=\sin^2 x+3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x$

Donc : $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=1-\cos^2 x+3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x$

Donc : $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$

Alors : $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équations : $f(x)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=0$ ou $\sin x+\sqrt{3}\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=0$ ou $2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=1$

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x=0$ ou $2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right)=1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ou $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ou $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi;-\frac{\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice3 : $(3,5pts)$: $(1,5pt+1,5pt+0,5pt)$

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : la suite (u_n) est minorée par 0

2) Montrer que : la suite (u_n) est majorée par 1

3) Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Solutions : 1) Montrons que $0\leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $0\leq u_0$ car : $0\leq 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $0\leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0\leq u_{n+1}$??

On a : $0\leq u_n$ donc : $0\leq u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}$

Donc : $1\leq u_{n+1}$

Donc : $0\leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n) est minorée par 0

2) Montrons que : $u_n\leq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $u_0\leq 1$ car : $1\leq 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $u_n\leq 1$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\leq 1$??

On a : $u_n\leq 1$ donc : $u_n+1\leq 2\Rightarrow\frac{u_n+1}{2}\leq 1\Rightarrow\sqrt{\frac{u_n+1}{2}}\leq\sqrt{1}\Rightarrow u_{n+1}\leq 1$

Donc : $u_{n+1}\leq 1$

Donc : : $u_n\leq 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n) est majorée par 1

3) la suite (u_n) est majorée par 1 et minorée par 0 donc (u_n) est bornée

Exercice4 : $(4pts)$: $(0,5pt+1,5pt+1pt+1pt)$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$\begin{cases}u_{n+2}=4(u_{n+1}-u_n)\\ u_0=\frac{1}{2};\ u_1=7\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{u_n}{2^n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer : u_2

2) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) En déduire u_n en fonction de n

5) Calculer la somme suivante : $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ en fonction de n

Solution :1) On a : $u_{n+2}=4(u_{n+1}-u_n)$: $\forall n\in\mathbb{N}$

n=0 : $u_{0+2}=4(u_{0+1}-u_0)\Rightarrow u_2=4(u_1-u_0)\Rightarrow u_2=4\left(7-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\boxed{u_2=26}$

2) Pour montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique ils suffit de montrer que :

$\forall n\in\mathbb{N}$: $2v_{n+1}=v_n+v_{n+2}$

$v_n+v_{n+2}=\frac{u_n}{2^n}+\frac{u_{n+2}}{2^{n+2}}=\frac{u_n}{2^n}+\frac{4(u_{n+1}-u_n)}{2^{n+2}}=\frac{4u_n+4(u_{n+1}-u_n)}{2^{n+2}}=\frac{4u_n+4u_{n+1}-4u_n}{2^{n+2}}=\frac{4u_{n+1}}{2^{n+2}}$

Donc : $v_n+v_{n+2}=2\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}=2v_{n+1}$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $v_0=\frac{u_0}{2^0}=\frac{1}{2}$

La raison de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $r=v_1-v_0=\frac{u_1}{2^1}-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3$

3) Ecriture de v_n en fonction de n :

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $v_0=\frac{1}{2}$

Donc : $v_n=v_0+nr=\frac{1}{2}+3n$

4) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $v_n=\frac{u_n}{2^n}$ Alors : $u_n=2^n v_n$ donc $\boxed{u_n=2^n\left(\frac{1}{2}+3n\right)}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

5) Calculons la somme suivante : $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ en fonction de n

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

Donc : $s_n=v_0+v_1+...+v_n=(n-0+1)\frac{v_0+v_n}{2}=\boxed{\frac{(n+1)(3n+1)}{2}}$

Exercice5 : $(3\ pts)$: $(1,5pt+1,5pt)$ 1) Calculer en fonction de n la somme suivante :

$s_n=1+3+9+27+...+3^n$

2) Déterminer n tel que : $s_n=1093$

Solutions :1) On pose : $u_n=3^n$ on a : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q=3$ Car : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=3$

Donc : $s_n=1+3+9+27+...+3^n=3^0+3^1+3^2+3^2+...+3^n=1\frac{1-3^{n-0+1}}{1-3}=-\frac{1}{2}\left(1-3^{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$

2) Déterminons n tel que : $s_n=1093$

$s_n=1093\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)=1093\Leftrightarrow 3^{n+1}-1=2086\Leftrightarrow 3^{n+1}=2087=3^7\Leftrightarrow n+1=7\Leftrightarrow\boxed{n=6}$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien