http://www.xriadiat.com **DS3: C** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : (5pts) : $(2\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Soit $x\neq k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

1) Montrer que : $\cos(x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)=\dfrac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$

2) Calculer : a) $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)$

Solution : 1) Soit $x\neq k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Montrons que : $\cos(x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)=\dfrac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$

C'est-à-dire on montre que : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)\overset{?}{=}\sin(8x)$

On a : $\sin(x)\times\cos(x)=\frac{1}{2}2\sin(x)\times\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{2}\sin(2x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}2\sin(2x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{4}\sin(4x)\times\cos(4x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}2\sin(4x)\times\cos(4x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{8}\sin(8x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=\sin(8x)$

Par suite : $\cos(x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)=\dfrac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$ si $x\neq k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) Calculons : a) $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

On sait que : $\cos(x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)=\dfrac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$ si $x\neq k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Pour : $x=\frac{\pi}{7}$ On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)=\frac{\sin\left(8\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=\boxed{-\frac{1}{8}}$$

Calculons : b) $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

Pour : $x=\frac{\pi}{9}$ On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{\sin\left(8\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=\boxed{\frac{1}{8}}$$

Calculons : c) $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{18}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{18}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{18}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)=\boxed{\frac{1}{8}}$$

Exercice2 : (5pts) : $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+2\text{pt})$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $A(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos^2 x+3\cos x-\sqrt{3}\sin x$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $A(x)=2\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations : $A(x)=0$

3) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $A(x)>0$

Solution : 1) On a : $A(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos^2 x+3\cos x-\sqrt{3}\sin x$

On a : $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{\pi}{3}\times\cos(x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos x$

$$2\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos x\right)$$
$$=\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\times\cos x\right)=2\cos x\sin x-2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$$
$$=\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x+3\cos x-\sqrt{3}\sin x=A(x)$$

Donc : $A(x)=2\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équations : $A(x)=0$

$$A(x)=0\Leftrightarrow 2\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2\cos x-\sqrt{3}=0\ \ ou\ \ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ ou\ \ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0\ \Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{6}\ \ ou\ \ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ ou\ \ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ ou\ \ x-\frac{\pi}{3}=k\pi\ \ ;\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ ou\ \ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ ou\ \ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ \ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi;-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

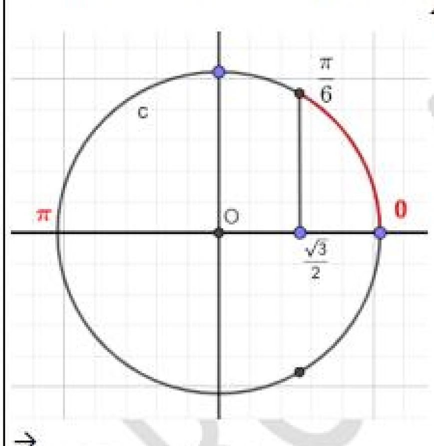
3) Résolvons dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $A(x)>0$

Résolvons d'abord dans $[0;\pi]$ l'équation : $A(x)=0$

$$A(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ ou\ \ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ ou\ \ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ \ ;\ k\in\mathbb{Z}\text{ et }x\in[0;\pi]$$

$$A(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\ \ ou\ \ x=\frac{\pi}{3}\ ;$$

$\rightarrow 2\cos x-\sqrt{3}>0\Leftrightarrow\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right[$



$\rightarrow$

$$\begin{cases}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>0\\ x\in[0;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=X\begin{cases}\sin(X)>0\\ X\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]\end{cases}\Leftrightarrow X\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\Leftrightarrow x\in\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$$

Tableau de signe :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$2\cos x-\sqrt{3}$		$+$	0	$-$		$-$	
$\sin(x-\frac{\pi}{3})$		$-$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S=\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

Exercice3 : $(5{,}5\text{pts})$: $(1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n^3}{3u_n^2+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : la suite (u_n) est minorée par 0

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3) a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$

b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solution : 1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n\succ 0$

1étapes : n=0 : $u_0=1$ et $u_0\succ 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n\geq 0$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\geq 0$??

On a : $u_n\geq 0$ Donc : $2u_n^3\geq 0$ et $3u_n^2+1\succ 0$ Donc : $\dfrac{2u_n^3}{3u_n^2+1}\geq 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1}\geq 0$

D'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n\geq 0$

Donc : la suite (u_n) est minorée par 0

b) Etudions la monotonie de la suite (u_n) :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n^3}{3u_n^2+1}-u_n=\frac{2u_n^3-3u_n^3-u_n}{3u_n^2+1}=\frac{-u_n^3-u_n}{3u_n^2+1}=\frac{-\left(u_n^3+u_n\right)}{3u_n^2+1}\leq 0\text{ car }\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n\geq 0$$

Donc : $u_{n+1}-u_n\leq 0$ par suite: la suite (u_n) est décroissante

2) a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$

$$u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n=\frac{2u_n^3}{3u_n^2+1}-\frac{1}{2}u_n=\frac{4u_n^3-3u_n^3-u_n}{2(3u_n^2+1)}=\frac{u_n^3-u_n}{2(3u_n^2+1)}=\frac{u_n\left(u_n^2-1\right)}{2(3u_n^2+1)}=\frac{u_n(u_n-1)(u_n+1)}{2(3u_n^2+1)}$$

et comme la suite (u_n) est décroissante alors : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n\leq u_0$

Donc : $u_n\leq 1$ et on a : $3u_n^2+1\succ 0$ *et* $u_n+1\succ 0$ *et* $u_n\geq 0$ *et* $u_n-1\prec 0$

Donc : $u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\leq 0$ c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$

b) Déduisons que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1étapes : n=0 : $u_0=1$ et comme : $u_0\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$??

On a : $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc : $u_n\times\frac{1}{2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{2}$ donc : $\frac{u_n}{2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et comme : $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$

Donc : $u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice4 : $(4{,}5\text{pts})$: $(1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_{n+2}=\frac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n)\\ u_0=2\ ;\ u_1=\frac{4}{9}\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-\frac{1}{3^n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2) a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) Ecrire v_n et u_n en fonction de n

c) Calculer la somme : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$

Solution :1) Montrons par récurrence que : $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 : $u_1=\frac{1}{9}u_0+\frac{2}{3^{0+2}}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2}=\frac{1}{9}u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+3}}$??

On a: $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$ donc $u_n=9\left(u_{n+1}-\frac{2}{3^{n+2}}\right)$ et on a : $u_{n+2}=\frac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n)$

$$u_{n+2}=\frac{1}{27}\left(12u_{n+1}-9\left(u_{n+1}-\frac{2}{3^{n+2}}\right)\right)=\frac{1}{27}\left(3u_{n+1}+\frac{2}{3^n}\right)$$

Donc : $u_{n+2}=\frac{1}{9}u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+2}}$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$

2)a) On a : $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}$ donc : $v_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}-\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{1}{9}u_n-\frac{1}{3^{n+2}}=\frac{1}{9}\left(u_n-\frac{1}{3^n}\right)$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{9}v_n$ par suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{9}$

et de premier terme $v_0=1$

2) b) Ecriture de v_n et u_n en fonction de n :

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0\times q^n\Leftrightarrow v_n=\left(\frac{1}{9}\right)^n$; $\forall n\in\mathbb{N}$ et Puisque : $u_n=v_n+\frac{1}{3^n}$ donc $u_n=\left(\frac{1}{9}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) c) $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$??

$u_n=v_n+w_n$ Avec $w_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites géométriques de raison : $q=\frac{1}{9}$ et $q'=\frac{1}{3}$

Donc : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\sum_{k=0}^{k=n}v_k+\sum_{k=0}^{k=n}w_k$

$$s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=v_0\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}+w_0\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\frac{21}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien