PROF: ATMANI NAJIB: 1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

http://www.xriadiat.com **DS3: B** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES

Durée :2 heures

Exercice1 : $(6,5\text{pts})$: $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+2\text{pt})$

Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $a=\cos x+\cos 3x$ et $b=\sin x+\sin 3x$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a^2+b^2=4\cos^2(2x)$

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a=2\cos x\times\cos 2x$ et $b=-2\sin 2x\times\cos x$

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a+b=2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

3) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=0$

4) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x<0$

Solution : 1) a) →Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a^2+b^2=4\cos^2(2x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $a=\cos x+\cos 3x$ et $b=\sin x+\sin 3x$

Donc : $a^2=(\cos x+\cos 3x)^2=\cos^2 x+\cos^2 3x+2\cos x\times\cos 3x$

Donc : $b^2=(\sin x+\sin 3x)^2=\sin^2 x+\sin^2 3x+2\sin x\times\sin 3x$

Par suite : $a^2+b^2=1+1+2\sin x\times\sin 3x+2\cos x\times\cos 3x$

Donc : $a^2+b^2=2+2(\cos x\times\cos 3x+\sin x\times\sin 3x)=2+2\cos(x+3x)=2+2\cos(4x)$

Donc : $a^2+b^2=2+2\cos(2(2x))=2+2\left(2\cos^2(2x)-1\right)=4\cos^2(2x)$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a^2+b^2=4\cos^2(2x)$

2) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a=2\cos x\times\cos 2x$ et $b=-2\sin 2x\times\cos x$

On a : $a=\cos x+\cos 3x=2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)=2\cos(2x)\cos(-x)=2\cos x\cos(2x)$

On a : $b=\sin x+\sin 3x=2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)=2\sin(2x)\cos(-x)=2\cos x\sin(2x)$

b) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a+b=2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$a+b=2\cos x\cos(2x)+2\sin(2x)\cos x=2\cos x\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right)$

$a+b=2\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\right)=2\sqrt{2}\cos x\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos(2x)+\sin\frac{\pi}{4}\sin(2x)\right)=2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

3) Résolvons dans $[0;\pi]$ l'équation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=0$

$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=0\Leftrightarrow a+b=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow\cos x=0\ ou\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ou\ \ 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad ;k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ou\ \ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\quad ;k\in\mathbb{Z}$

$0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le\pi\Leftrightarrow -0,5\le k\le 0,5\Rightarrow k=0\Rightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

$0\le\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\le\pi\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8}\le\frac{k\pi}{2}\le\frac{5\pi}{8}\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le k\le\frac{5}{4}\Rightarrow k=0\ ou\, k=1\Rightarrow\boxed{x=\frac{3\pi}{8}}\ ou\ \boxed{x=\frac{7\pi}{8}}$

Donc : $S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{8}\right\}$

4) Résolvons dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x<0$

$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x<0\Leftrightarrow a+b<0\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\begin{cases}\cos x>0\\ x\in[0;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0\\ x\in[0;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=X:\begin{cases}\cos(X)>0\\ X\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]\end{cases}\Leftrightarrow X\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$

$\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0\\ x\in[0;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow X+\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]\Leftrightarrow 2x\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8};\pi\right]$

Tableau de signe :

x	0		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$\cos x$		+	|	+	0	−	|	−	
$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$		+	0	−	|	−	0	+	
$a+b$		+	0	−	0	+	0	−	

Donc : $S=\left]\frac{7\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8};\pi\right]$

Exercice2 : (3pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$: Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{7u_n}{2u_n+1}\end{cases}\ \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Solutions : Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\ :0\le u_n\le 3$

1étapes : n=0 on a : $0\le u_0\le 3$ car $0<1<3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $0\le u_n\le 3$

3étapes : Montrons alors que : $0\le u_{n+1}\le 3$??

On a : $0\le u_n$ donc $0\le 2u_n+1$ et $0\le 7u_n$

Donc $0\le u_{n+1}$ (1) et on a : $u_{n+1}-3=\frac{7u_n}{2u_n+1}-3=\frac{7u_n-3(2u_n+1)}{2u_n+1}$

$u_{n+1}-3=\frac{u_n-3}{2u_n+1}$ et puisque on a : $0\le u_n\le 3$

On a donc : $u_n-3\le 0$ et $0\le 2u_n+1$

Donc : $u_{n+1}-3\le 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1}\le 3\ (2)$

De (1) et (2) en déduit que : $0\le u_{n+1}\le 3$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}\ :0\le u_n\le 3$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Exercice3 : (3pts) : $(1\text{pt}+2\text{pt})$:

Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n-1}\end{cases}\ \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 ; u_2

2) Déterminer u_{n+2} en fonction de u_n et que peut-on déduire ?

Solution :1) Pour n=0 on a: $u_{0+1}=\frac{u_0}{u_0-1}=\frac{3}{3-1}\Rightarrow\boxed{u_1=\frac{3}{2}}$

Pour n=1 on a : $u_{1+1}=\frac{u_1}{u_1-1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1}\Rightarrow\boxed{u_2=3}$

2) Soit : $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1}=\frac{\frac{u_n}{u_n-1}}{\frac{u_n}{u_n-1}-1}=\frac{u_n}{u_n-u_n+1}=u_n$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+2}=u_n$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période : $T=2$

Exercice4 : $(7,5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt})$

Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{9u_n}{4u_n+3}\\ u_0=\frac{1}{2}\end{cases}\ \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 et u_2

2) Montrer que $u_n\ne 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

3) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=2-\frac{3}{u_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

b) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

c) On pose : $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$; Calculer : S_n en fonction de n

d) Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solution : 1) Calculons : u_1 et u_2

$u_{0+1}=\frac{9u_0}{4u_0+3}\Rightarrow u_1=\frac{9}{10}$ et $u_{1+1}=\frac{9u_1}{4u_1+3}\Rightarrow u_1=\frac{27}{22}$

2) Montrons par récurrence que : $u_n\ne 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0=\frac{1}{2}\ne 0$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n\ne 0$

Montrons que : $u_{n+1}\ne 0$?

On a : $u_n\ne 0$ donc : $\frac{9u_n}{4u_n+3}\ne 0$ donc $u_{n+1}\ne 0$

Donc : $u_n\ne 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

3)a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique

Soit : $n\in\mathbb{N}$; $v_{n+1}=2-\frac{3}{u_{n+1}}=2-3\times\frac{4u_n+3}{9u_n}=2-\frac{4u_n+3}{3u_n}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{3}{u_n}\right)$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$

Donc :la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3}=q$ et son premier terme : $v_0=2-\frac{3}{u_0}=-4$

b) Déterminons v_n en fonction de n :

Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3}=q$ et son premier terme : $v_0=-4$ alors :

$\boxed{v_n=-4\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Déterminons u_n en fonction de n :

On a : $v_n=2-\frac{3}{u_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$ donc : $\frac{3}{u_n}=2-v_n\Leftrightarrow u_n=\frac{3}{2-v_n}$

Par suite : $\boxed{u_n=\frac{3}{2+4\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$

c) Calculons : $S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$ en fonction de n

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc : $S_n=(le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$

$le\ nombre\ de\ termes=n-1+1=n$

Donc : $S_n=v_1\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

2) a) Etude de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$v_{n+1}-v_n=qv_n-v_n=v_n(q-1)=-4\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\succ 0$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien