

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°3 sur les leçons suivantes :

**CALCUL TRIGONOMETRIQUE et LES SUITES NUMERIQUES**

Durée : 2 heures

**Exercice1** : (6,5pts) : (1,5pt+1,5pt+1,5pt+2pt)

Soit  $x \in \mathbb{R}$  on pose :  $a = \cos x + \cos 3x$  et  $b = \sin x + \sin 3x$

1) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 4 \cos^2(2x)$

2) a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} : a = 2 \cos x \times \cos 2x$  et  $b = -2 \sin 2x \times \cos x$

b) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} : a + b = 2\sqrt{2} \cos x \times \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

3) Résoudre dans  $[0, \pi]$  l'équation :  $\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = 0$

4) Résoudre dans  $[0, \pi]$  l'inéquation :  $\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x < 0$

**Solution** : 1) a) → Montrons que :  $\forall x \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 4 \cos^2(2x)$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  : On a :  $a = \cos x + \cos 3x$  et  $b = \sin x + \sin 3x$

Donc :  $a^2 = (\cos x + \cos 3x)^2 = \cos^2 x + \cos^2 3x + 2 \cos x \times \cos 3x$

Donc :  $b^2 = (\sin x + \sin 3x)^2 = \sin^2 x + \sin^2 3x + 2 \sin x \times \sin 3x$

Par suite :  $a^2 + b^2 = 1 + 1 + 2 \sin x \times \sin 3x + 2 \cos x \times \cos 3x$

Donc :  $a^2 + b^2 = 2 + 2(\cos x \times \cos 3x + \sin x \times \sin 3x) = 2 + 2 \cos(x + 3x) = 2 + 2 \cos(4x)$

Donc :  $a^2 + b^2 = 2 + 2 \cos(2(2x)) = 2 + 2(2 \cos^2(2x) - 1) = 4 \cos^2(2x)$

Par suite :  $\forall x \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 4 \cos^2(2x)$

2) a) Montrons que :  $\forall x \in \mathbb{R} : a = 2 \cos x \times \cos 2x$  et  $b = -2 \sin 2x \times \cos x$

On a :  $a = \cos x + \cos 3x = 2 \cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2 \cos(2x) \cos(-x) = 2 \cos x \cos(2x)$

On a :  $b = \sin x + \sin 3x = 2 \sin\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2 \sin(2x) \cos(-x) = 2 \cos x \sin(2x)$

b) Montrons que :  $\forall x \in \mathbb{R} : a + b = 2\sqrt{2} \cos x \times \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$a + b = 2 \cos x \cos(2x) + 2 \sin(2x) \cos x = 2 \cos x (\cos(2x) + \sin(2x))$

$a + b = 2\sqrt{2} \cos x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x)\right) = 2\sqrt{2} \cos x \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(2x)\right) = 2\sqrt{2} \cos x \times \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

3) Résolvons dans  $[0, \pi]$  l'équation :  $\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = 0$

<http://www.xradiat.com/>

$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos x \times \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x \times \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$  ou  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ou  $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ou  $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$

$0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -0,5 \leq k \leq 0,5 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} \leq \frac{k\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{5}{4} \Rightarrow k = 0$  ou  $k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8}$  ou  $x = \frac{7\pi}{8}$

Donc :  $S_{[0, \pi]} = \left\{ \frac{3\pi}{8}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{8} \right\}$

4) Résolvons dans  $[0, \pi]$  l'inéquation :  $\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x < 0$

$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x < 0 \Leftrightarrow a + b < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos x \times \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow \cos x \times \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

$\begin{cases} \cos x > 0 \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

$\begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = X : \begin{cases} \cos(X) < 0 \\ X \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow X \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[ \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$

$\begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow X + \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right[ \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right] \Leftrightarrow 2x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right[ \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right] \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{3\pi}{8}\right[ \cup \left[\frac{7\pi}{8}; \pi\right]$

Tableau de signe :

$x$	0	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\pi$
$\cos x$	+	+	0	-	-
$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	+	0	-	-	+
$a + b$	+	0	-	+	-

Donc :  $S = \left] \frac{7\pi}{8}; \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{7\pi}{8}; \pi \right[$

**Exercice2** : (3pts) : (1,5pt+1,5pt) : Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n}{2u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 1 et majorée par 3.

<http://www.xradiat.com/>

**Solutions** : Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 3$

1étapes :  $n=0$  on a :  $0 \leq u_0 \leq 3$  car  $0 < 1 < 3$

Donc la proposition est vraie pour  $n=0$

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que :  $0 \leq u_n \leq 3$

3étapes : Montrons alors que :  $0 \leq u_{n+1} \leq 3$  ??

On a :  $0 \leq u_n$  donc  $0 \leq 2u_n + 1$  et  $0 \leq 7u_n$

Donc  $0 \leq u_{n+1}$  (1) et on a :  $u_{n+1} - 3 = \frac{7u_n}{2u_n + 1} - 3 = \frac{7u_n - 3(2u_n + 1)}{2u_n + 1}$

$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{2u_n + 1}$  et puisque on a :  $0 \leq u_n \leq 3$

On a donc :  $u_n - 3 \leq 0$  et  $0 \leq 2u_n + 1$

Donc :  $u_{n+1} - 3 \leq 0$  c'est-à-dire :  $u_{n+1} \leq 3$  (2)

De (1) et (2) en déduit que :  $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

D'où  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 3$

Donc :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 1 et majorée par 3.

**Exercice3** : (3pts) : (1pt + 2pt) :

Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer :  $u_1$  ;  $u_2$

2) Déterminer  $u_{n+2}$  en fonction de  $u_n$  et que peut-on déduire ?

**Solution** : 1) Pour  $n=0$  on a :  $u_{0+1} = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{3}{3-1} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{2}$

Pour  $n=1$  on a :  $u_{1+1} = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} \Rightarrow u_2 = 3$

2) Soit :  $n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{u_n}{u_n - 1}}{\frac{u_n}{u_n - 1} - 1} = \frac{u_n}{u_n - u_n + 1} = u_n$

Donc :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_n$

Donc : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique de période :  $T = 2$

<http://www.xradiat.com/>

**Exercice4** : (7,5pts) : (1pt+1pt+1,5pt+1,5pt+1pt+1,5pt)

Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{9u_n}{4u_n + 3} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer :  $u_1$  et  $u_2$

2) Montrer que  $u_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $v_n = 2 - \frac{3}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

b) Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire  $u_n$  en fonction de  $n$

c) On pose :  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  ; Calculer :  $S_n$  en fonction de  $n$

d) Etudier la monotonie de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Solution** : 1) Calculons :  $u_1$  et  $u_2$

$u_{0+1} = \frac{9u_0}{4u_0 + 3} \Rightarrow u_1 = \frac{9}{10}$  et  $u_{1+1} = \frac{9u_1}{4u_1 + 3} \Rightarrow u_2 = \frac{27}{22}$

2) Montrons par récurrence que :  $u_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour  $n=0$  on a  $u_0 = \frac{1}{2} \neq 0$  donc la proposition vraie pour  $n=0$

Supposons :  $u_n \neq 0$

Montrons que :  $u_{n+1} \neq 0$  ?

On a :  $u_n \neq 0$  donc :  $\frac{9u_n}{4u_n + 3} \neq 0$  donc  $u_{n+1} \neq 0$

Donc :  $u_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Montrons que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique

Soit :  $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_{n+1}} = 2 - 3 \times \frac{4u_n + 3}{9u_n} = 2 - \frac{4u_n + 3}{3u_n} = \frac{1}{3} \left( 2 - \frac{3}{u_n} \right)$

Donc :  $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$

Donc : la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison :  $\frac{1}{3} = q$  et son premier terme :  $v_0 = 2 - \frac{3}{u_0} = -4$

b) Déterminons  $v_n$  en fonction de  $n$  :

Puisque :  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison :  $\frac{1}{3} = q$  et son premier terme :  $v_0 = -4$  alors :

$$v_n = -4 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Déterminons  $u_n$  en fonction de  $n$  :

<http://www.xradiat.com/>

On a :  $v_n = 2 - \frac{3}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  donc :  $\frac{3}{u_n} = 2 - v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2 - v_n}$

Par suite :  $u_n = \frac{3}{2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

c) Calculons :  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  en fonction de  $n$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique donc :  $S_n = \left(\text{le premier terme dans la somme}\right) \frac{1 - r^{(\text{le nombre de termes})}}{1 - r}$

le nombre de termes =  $n - 1 + 1 = n$

Donc :  $S_n = v_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$

2) a) Etude de la monotonie de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$v_{n+1} - v_n = qv_n - v_n = v_n(q - 1) = -4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$

Donc :  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

**PROF: ATMANI NAJIB**

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



<http://www.xradiat.com/>