1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Exercice1 : (3,5 pts) $(1\text{pt}+2,5\text{pt})$

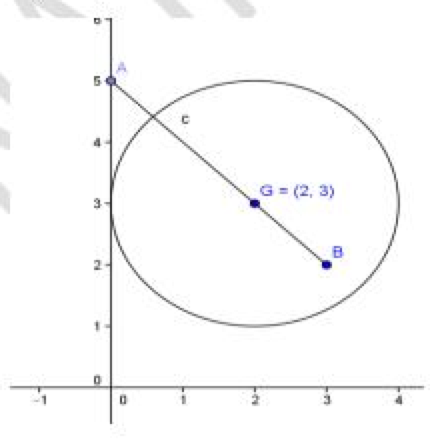
Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$

Et soit G = Bar {(A, 1); (B, 2)}

1) Déterminer les coordonnées de G

2) Déterminer et dessiner l'ensemble suivant : $(C)=\left\{M\in(P)/\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=6\right\}$

Solution : $\begin{cases} x_G=\dfrac{0+6}{3}=2 \\ y_G=\dfrac{5+4}{3}=3 \end{cases}$ donc : $G(2;3)$



D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=6cm \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=6cm$

$\Leftrightarrow |3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=6cm \Leftrightarrow 3MG=6cm \Leftrightarrow MG=2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de Rayon $r=2cm$

Exercice2 : (4,5pts) :

$(1\text{pt}+0,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1) Définir vectoriellement et placer les points I, J, K et L définis par :

I est le barycentre de (A, 5) et (B, −2)

J le barycentre de (B, 1) et (C, −2)

K le barycentre de (C, −5) et (D, 2) et L est le barycentre de (D, −1) et (A, 2).

2) Démontrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.

Solution :1) En effet, on sait que si G est barycentre de $(A;\alpha);(B;\beta)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

Pour tout point M du plan, on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

→ I est le barycentre de (A, 5) et (B, −2) donc : $5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$

Pour : $M=A$ on a : $5\overrightarrow{AA}-2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AI}$ et donc : $\overrightarrow{AI}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

→ J est le barycentre de (B, 1) et (C, −2)

Donc : $1\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=-1\overrightarrow{MJ}$

Pour : $M=B$ on a : $1\overrightarrow{BB}-2\overrightarrow{BC}=-1\overrightarrow{BJ}$ et donc : $\overrightarrow{BJ}=2\overrightarrow{BC}$

→ K le barycentre de (C, −5) et (D, 2)

Donc : $-5\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=-3\overrightarrow{MK}$

Pour : $M=C$ on a : $-5\overrightarrow{CC}+2\overrightarrow{CD}=-3\overrightarrow{CK}$ et donc : $\overrightarrow{CK}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

→ L est le barycentre de (D, −1) et (A, 2).

Donc : $-1\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{MA}=1\overrightarrow{ML}$

Pour : $M=D$ on a : $-1\overrightarrow{DD}+2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DL}$ et donc : $\overrightarrow{DL}=2\overrightarrow{DA}$

2) Démontrons que IJKL est un parallélogramme de centre O.

En sommant membre à membre les égalités du résultat de 1), on obtient :

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{DL}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{DA}$

Or : ABCD est un parallélogramme de centre O donc : $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$

Par suite : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{DL}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

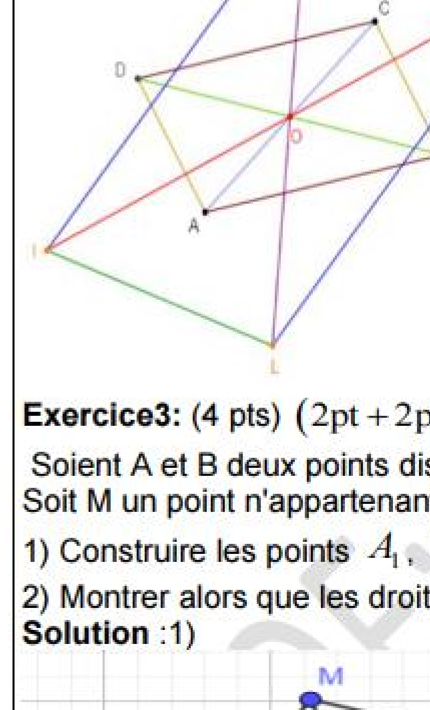
En introduisant le point O, on obtient :

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{DL}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OL}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}+\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}=\vec{0}$

Alors : IJKL est un parallélogramme de centre O.



Exercice3: (4 pts) $(2\text{pt}+2\text{pt})$

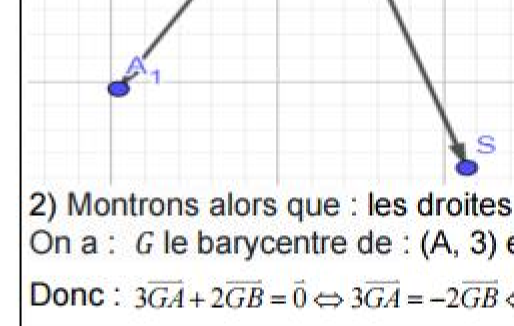
Soient A et B deux points distincts et G le barycentre de (A, 3) et (B, 2).

Soit M un point n'appartenant pas à (AB)

1) Construire les points A_1, B_1 et S tels que : $\overrightarrow{MA_1}=3\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB_1}=2\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}$

2) Montrer alors que les droites (MS) et (AB) sont sécantes en G.

Solution :1)



2) Montrons alors que : les droites (MS) et (AB) sont sécantes en G

On a : G le barycentre de : (A, 3) et (B, 2).

Donc : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GB}$

Donc : A, B et G sont alignés. D'où, G∈(AB)

On a : $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}$ Or : $\overrightarrow{MA_1}=3\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB_1}=2\overrightarrow{MB}$

Donc : $\overrightarrow{MS}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$ et comme G le barycentre de : (A, 3) et (B, 2).

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=(2+3)\overrightarrow{MG}$

Donc : $\overrightarrow{MS}=5\overrightarrow{MG}$

Donc : M, S et G sont alignés. D'où, G∈(MS)

Ce qui prouve que les droites (MS) et (AB) sont sécantes en G.

Exercice4 : (3 pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$

Considérons les points $A(1;2)$; $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) médiatrice du segment$[AB]$

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Solution : 1) $\overrightarrow{AB}(a,b)$ avec $(D)/ax+by+c=0$ un vecteur normal a (D)

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ Donc :$(D)/-3x+y+c=0$

Or $I\in(D)$ I est le milieu du segment$[AB]$: $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$

Donc : $-3\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-4$

Par suite : $(D)/-3x+y-4=0$

2)(Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire à (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(2,1)$ un vecteur normal a (Δ) donc : $(\Delta)/2x+y+c=0$

On a : $A\in(\Delta)$ donc : $2\times1+2+c=0\Leftrightarrow c=-4$

Donc : $(\Delta):2x+y-4=0$

Exercice5 : (2 pts) On considère le cercle (C) de centre I(–1 ; 2) et de rayon 3 et la droite (D) d'équation : $y=-x-2$

Déterminer l'intersection de la droite (D) et du cercle (C).

Solution : Les coordonnées des points d'intersection de la droite (D) et du cercle (C) doivent vérifier les deux équations de la droite (D) et du cercle (C), c'est-à-dire un système formé par ces deux équations.

Le cercle (C) de centre I(–1 ; 2) et de rayon 3 a pour équation :

$(x--1)^2+(y-2)^2=3^2$ soit $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

Une équation de la droite (D) est $y=-x-2$ donc on doit résoudre le système suivant :

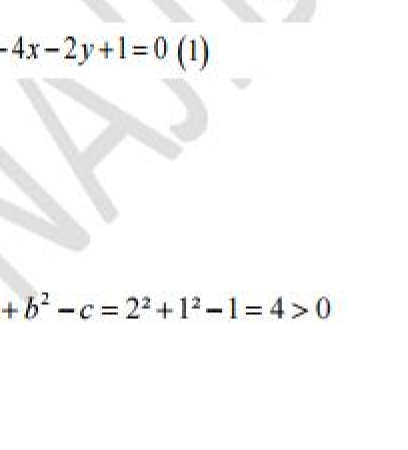
$(S)\begin{cases}(1):(x+1)^2+(y-2)^2=9\\(2):y=-x-2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(1):(x+1)^2+(-x-2-2)^2=9\\(2):y=-x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+1+x^2+8x+16=9\\(2):y=-x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+10x+8=0\\(2):y=-x-2\end{cases}$

On résout l'équation de second degré $2x^2+10x+8=0$ et on reprend notre système.

$2x^2+10x+8=0$: $\Delta=36$

$x_1=\dfrac{-10+6}{4}=-1$ et $x_1=\dfrac{-10-6}{4}=-4$



Donc notre système est équivalent à : $\begin{cases}x=-1\ ou\ x=-4\\(2):y=-x-2\end{cases}$

Ce qui est équivalent à : $\begin{cases}x=-1\\y=-x-2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-4\\y=-x-2\end{cases}$

C'est-à-dire : $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}$

Donc les coordonnées des points d'intersection de la droite (D) et du cercle (C) sont :(–1 ; –1) et (–4 ; 2).

Exercice6 : (3 pts) : $(2,5\text{pt}+0,5\text{pt})$ Soit ($\mathcal{C}$) le cercle d'équation : $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ (1)

1) Vérifier que $A(0;1)\in(C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle ($\mathcal{C}$) en A.

Solution :1) On a : $0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$

Donc $A(0;1)\in(C)$

2)L'équation de la tangente au cercle ($\mathcal{C}$) en A. ?? $a=2;b=1;c=1$: $a^2+b^2-c=2^2+1^2-1=4>0$

Donc ($\mathcal{C}$) cercle de centre $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ c'est-à-dire : $\Omega(2;1)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$ et $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$

$-2(x-0)=0\Leftrightarrow-2(x-0)+0(y-1)=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow x=0$

Donc : L'équation de la tangente au cercle ($\mathcal{C}$) en A est :$(D):x=0$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien