http://www.xriadiat.com **DS1: G** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : $(4{,}5\text{pts})$: $(1{,}5\text{pt}+2\text{pt}+1\text{pt})$

Soit ABCD un carré et K le barycentre des points pondérés : (A, 2), (B, – 1), (C, 2) et (D, 1).
On note I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1) et J celui de (C, 2) et (D, 1).
1) Placer I et J en justifiant
2) Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$
En déduire que K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).
3) Placer K en justifiant

Solution : 1) I est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1)

$2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}-\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AI}$

Ce qui permet de placer le point I (A est le milieu de [IB]).
J est le barycentre des points pondérés (C, 2) et (D, 1)

$2\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$:Ce qui permet de placer le point J.

2) Réduisons l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$
$2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KI}$:car I est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1).
$2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=3\overrightarrow{KJ}$ car J est le barycentre des points pondérés (C, 2) et (D, 1)
Comme K est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1), (C, 2) (D, 1) alors
$2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{KI}+3\overrightarrow{KJ}=\vec{0}$
Ainsi K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).
3) Pour construire le point K, on place d'abord I
(Sachant que I est le symétrique de B par rapport à A)
Puis on place J (sachant que $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$). Pour finir on utilise :

$\overrightarrow{KI}+3\overrightarrow{KJ}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{KI}+3\left(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IJ}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{KI}+3\overrightarrow{IJ}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{IK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$ ce qui permet de placer le point K

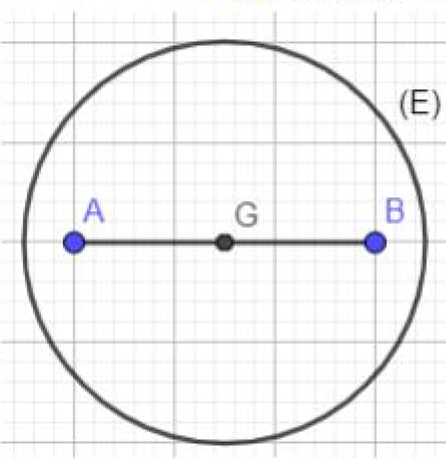
<u>La méthode est à retenir :</u> Pour placer le barycentre de 4 points (A, α), (B, β), (C, γ) (D, δ) :
On construit d'abord I le barycentre de (A, α) ; (B, β) et J le barycentre de (C, γ) ;(D, δ).
Puis on construit K le barycentre de (I, α + β) et (J, γ + δ)

Exercice2 : (3 pts)

Soient A et B deux points tel que : $AB=3cm$
Déterminer et construire l'ensemble suivant : $(E)=\left\{M\in(P)/\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=4\right\}$

Solution : Soit $G = Bar\ \{(A,\ 1);\ (B,\ 1)\}$
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=4\Leftrightarrow\left\|(1+1)\overrightarrow{MG}\right\|=4\Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=4\Leftrightarrow MG=2$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=2cm$
Comme : $G = Bar\ \{(A,\ 1);\ (B,\ 1)\}$ alors aussi : G est le milieu du segment $[AB]$



Exercice3 : $(4{,}5\text{ pts})$: $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

Dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ direct

Considérons les points $A(5;0)$; $B(2;1)$ et $C(6;3)$.

1) Calculer : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) En déduire la nature du triangle ABC

3) En déduire une mesure des l'angles : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)$.

Solution : 1) On sait que : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-3\times1+1\times3=-3+3=0$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{10}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{0}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=0$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{-10}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-1$

2) On a : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ et $AB=AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

3) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{-\pi}{2}[2\pi]$ car : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-1$ et $\left(\overline{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{4}[2\pi]=-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice4 : (5 pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$ Soit A (−2 ;1) et B (4 ; −2) deux points du plan muni d'un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

On note (C) l'ensemble des points M (x ; y) du plan tels que : $x^2+y^2+2x-6y-15=0$

1)Déterminer l'ensemble (C)
2) Déterminer une équation de la droite (AB).

3) Déterminer les points d'intersection I et J de (AB) avec (C) .
4)Déterminer une équation de la tangente à (C) au point $K(2;-1)$.

Solution : 1) $x^2+y^2+2x-6y-15=0\Leftrightarrow(x+1)^2-1+(y-3)^2-9-15=0\Leftrightarrow(x-(-1))^2(y-3)^2=25$

Le point M décrit donc le cercle de centre $C(-1;3)$ et de rayon 5.

2) $\overrightarrow{AB}(6;-3)$ Ainsi une équation de la droite (AB) est de la forme $3x+6y+c=0$.

$A(-2;1)$ vérifie donc cette équation. Ainsi $-6+6+c=0$ et $c=0$.
Une équation de (AB) est donc $3x+6y=0$ ou $y=-12x$.

3) Les coordonnées de I et J vérifient le système : $(S)\begin{cases}(1):(x+1)^2+(y-3)^2=25\\(2):y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+\left(-\frac{1}{2}x-3\right)^2=25\\y=-\frac{1}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+1+\frac{1}{4}x^2+3x+9=25\\y=-\frac{1}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{4}x^2+4x-15=0\\y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$

On détermine les solutions de $54x+5x-15=0$: $\Delta=100$. Les solutions sont donc : $x_1=2$ et $x_2=-6$

Ainsi Si $x_1=2$ alors $y=-1$ et si $x_2=-6$ alors : $y=3$.

On a donc $I(-6;3)$ et $J(2;-1)$.

4)Le vecteur $\overrightarrow{CK}$ est normal à la tangente à (C) en K.

Or $\overrightarrow{CK}(3;-4)$ Une équation de la tangente est alors de la forme $3x-4y+c=0$.

Or K appartient à cette droite donc :$6+4+c=0$ soit $c=-10$.
Une équation de la tangente à (C) en K est donc $3x-4y-10=0$

Exercice5 : (3 pts) : Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

Soient les points $A(4;0)$ $B(4;4)$; $C(0;4)$.

Déterminer une équation du cercle inscrit dans le carré OABC

Solution : Il faut déterminer les coordonnées du centre du cercle : il se trouve au milieu du segment [OB].
Comme O(0;0) et B(4;4), le centre Ω a pour coordonnées (20+4;20+4) donc Ω(2;2).
Le cercle passe par le point de coordonnées (2;4) donc le rayon est :

$r=\sqrt{(2-2)^2+(2-4)^2}=2$

Le cercle a pour équation :

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien