http://www.xriadiat.com **DS1: F** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : (8pts) : $(1pt+1pt+1pt+1pt+1pt+1,5pt+1,5pt)$

Soit ABC un triangle tel que : $AB=5$; $AC=4$ et $BC=6$

On désigne par : I le milieu du segment $[AB]$et J le milieu du segment $[AC]$

1) Construire G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)

2) Soit H le point tel que : $3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

a) Montrer que : les points H ; C et G sont alignés

b) Montrer que : les points H ; I et J sont alignés

c) En déduire une construction du point H

3) La droite (AH) coupe la droite (BC) en K

Montrer que : K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

a) $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ}\right\|$

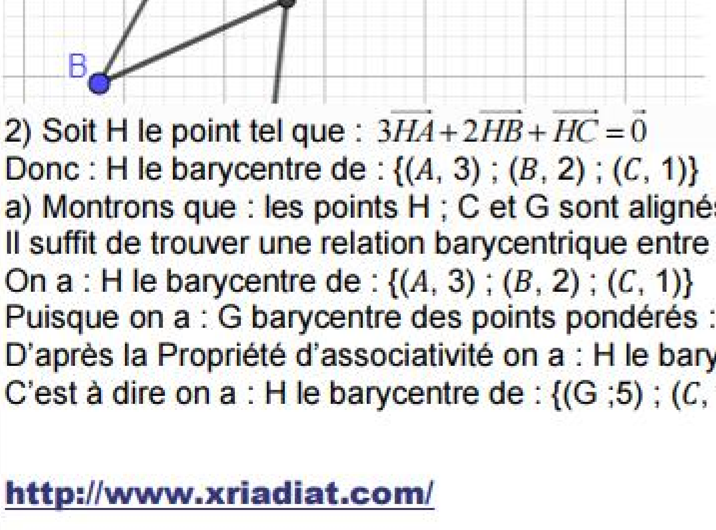
b) $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=10$

Solution : 1) G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)

Donc : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}}$ et $G\in(AB)$ Voir figure



2) Soit H le point tel que : $3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

Donc : H le barycentre de : $\{(A,3) ; (B,2) ; (C,1)\}$

a) Montrons que : les points H ; C et G sont alignés

Il suffit de trouver une relation barycentrique entre : H ; C et G ??????

On a : H le barycentre de : $\{(A,3) ; (B,2) ; (C,1)\}$

Puisque on a : G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)

D'après la Propriété d'associativité on a : H le barycentre de : {(G ;2+3) ; $(C,1)$}

C'est à dire on a : H le barycentre de : {(G ;5) ; $(C,1)$}

Donc : les points H ; C et G sont alignés

En effet : H le barycentre de : {(G ;5) ; $(C,1)$}

Donc : $5\overrightarrow{HG}+1\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HG}}$ et $H\in(CG)$

b) Montrons que : les points H ; I et J sont alignés

Il suffit de trouver une relation barycentrique entre : H ; I et J ??????

Analysons notre problème :

I le milieu du segment $[AB]$ donc : I est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (B ; 1)

J le milieu du segment $[AC]$ donc : J est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (C ; 1)

Et on a : H le barycentre de : $\{(A,3) ; (B,2) ; (C,1)\}$

Donc : H le barycentre de : $\{(A,2) ; (A,1) ; (B,2) ; (C,1)\}$

Donc : H le barycentre de : $\{(A,2) ; (B,2) ; (A,1)) ; (C,1)\}$

Donc : H le barycentre de : {(I, 4) ; (J, 2))} : d'après la Propriété d'associativité

En effet : on a : H le barycentre de : $\{(A,3) ; (B,2) ; (C,1)\}$

Donc : $3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ avec Charles on aura :

Donc : $2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

Donc : $4\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HJ}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}\right)=\vec{0}$ et comme : I est le barycentre : (A ; 1) et (B ; 1)

et J est le barycentre: (A ; 1) et (C ; 1)

Alors : $4\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$ c'est-à-dire : H le barycentre de : {(I, 4) ; (J, 2))}

Par suite : les points H ; I et J sont alignés

c) Déduisons une construction du point H :

On a : H le barycentre de : {(I, 4) ; (J, 2))} donc : H est le barycentre de : {(I, 2) ; (J, 1))} aussi

Donc : $2\overrightarrow{HI}+1\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$ Voir figure

3) La droite (AH) coupe la droite (BC) en K

Montrons que : K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)

Dans le triangle ABC on a : I le milieu du segment $[AB]$et J le milieu du segment $[AC]$

Donc : La droite (IJ) est parallèle à la droite (BC)

Dans le triangle ABK on a : I le milieu du segment $[AB]$et La droite (IH) est parallèle à la droite (BK)

Donc : H est aussi le milieu du segment $[AK]$

Donc : $\overrightarrow{KA}=2\overrightarrow{KH}$

Donc : $1\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KH}=\vec{0}$

Par suite : K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)

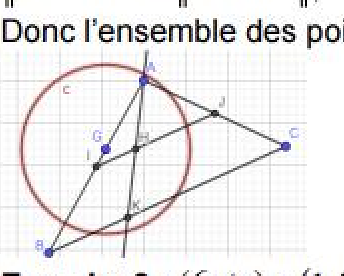
4) a) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que : $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=10$

On a : G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=10\Leftrightarrow\left\|(3+2)\overrightarrow{MG}\right\|=10\Leftrightarrow|5|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=10\Leftrightarrow 5MG=10\Leftrightarrow MG=2$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=2$



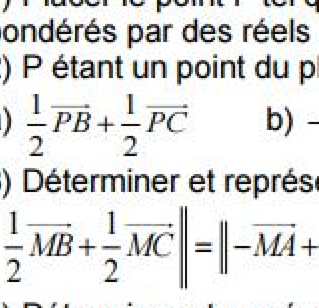
c) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que : $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=10$

On a : G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=10\Leftrightarrow\left\|(3+2)\overrightarrow{MG}\right\|=10\Leftrightarrow|5|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=10\Leftrightarrow 5MG=10\Leftrightarrow MG=2$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=2$



Exercice2 : (6pts) : $(1,5pt+1,5pt+1,5pt+1,5pt)$

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 8 cm et BA = 5 cm.

Soit I le milieu de [BC].

1) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}$ et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera

2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$ b) $-\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}$ c) $2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PA}$

3) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

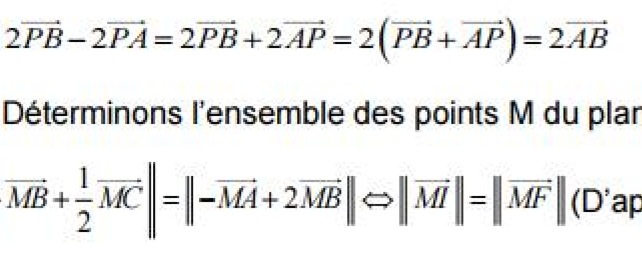
4) Déterminer et représenter l'ensemble des points N du plan vérifiant :

$\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|$

Solution : 1) Comme : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}$; B est le milieu de [AF].

Donc : $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{AF}=\vec{0}$

On en déduit que : F barycentre des points pondérés (A, -1) et (B, 2).



2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{PI}$ (identité du parallélogramme).

b) $-\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PF}$ car : F barycentre des points pondérés (A, -1) et (B, 2).

c) $2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{AP}=2\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AP}\right)=2\overrightarrow{AB}$

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ (D'après ce qui précède).

L'ensemble des points M vérifiant cette relation est donc la médiatrice de [IF]

4) Déterminons l'ensemble des points N du plan vérifiant : $\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{NI}\right\|=\left\|2\overrightarrow{AB}\right\|$: d'après la question 2

$\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|\Leftrightarrow NI=AB$

L'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon AB.

Exercice3 : (2 pts) : Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;2)$ et $B(-3;1)$

Solution : $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\overrightarrow{MA}(1-x;2-y)$ et $\overrightarrow{MB}(-3-x;1-y)$

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow(-3-x)(1-x)+(1-y)(2-y)=0$

Donc : $(C):x^2+y^2+2x-3y-1=0$

Exercice4 : (4 pts) : $(1pt+3pt)$ Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

Soient les points $A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$.

1) Montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Solution : 1) On a : $\overrightarrow{AB}(1;-3)$; $\overrightarrow{AC}(-1;-7)$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & -7\end{vmatrix}=-10\neq 0$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1)Soient $I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$ et $J(3;-1)$ le milieu respectivement du segment : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par I et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (D)

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{7}{2}\right)-3\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow x-3y+4=0$

Donc : $(D):x-3y+4=0$ et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et $\overrightarrow{BC}$ un vecteur normal a (Δ) : $M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow x+2y-1=0$

Donc : $(\Delta):x+2y-1=0$ (après simplifications)

Soit : Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc c'est le point d'intersection de (Δ) et (D) on va donc résoudre le système : $\begin{cases}x-3y+4=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$

La résolution de ce système donne : $\Omega(-1;1)$ donc $\Omega(-1;1)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r=A\Omega=\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=5$

L'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

C'est-à-dire : $(C):x^2+y^2+2x-2y-23=0$.

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien