http://www.xriadiat.com **DS1: E** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Durée :2 heures

Exercice1 : (7,5pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Soit ABC un triangle tel que : $AB=5$; $AC=4$ et $BC=6$

On désigne par : I le milieu du segment $[AB]$et J le milieu du segment $[AC]$

1) Construire G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)

2) Soit H le point tel que : $3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

a) Montrer que : les points H ; C et G sont alignés

b) Montrer que : les points H ; I et J sont alignés

c) En déduire une construction du point H

3) La droite (AH) coupe la droite (BC) en K

Montrer que : K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

a) $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MH}\right\|$

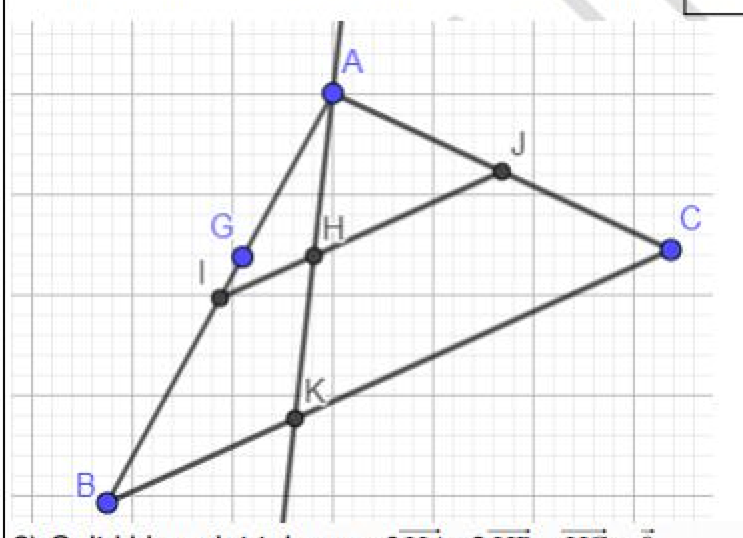
b) $3MA^2+2MB^2=50$

Solution : 1) G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)

Donc : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}}$ et $G\in(AB)$ Voir figure



2) Soit H le point tel que : $3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

Donc : H le barycentre de : {(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)}

a) Montrons que : les points H ; C et G sont alignés

Il suffit de trouver une relation barycentrique entre : H ; C et G ??????

On a : H le barycentre de : {(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)}

Puisque on a : G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)

D'après la Propriété d'associativité on a : H le barycentre de : {(G ;2+3) ; (C, 1)}

C'est à dire on a : H le barycentre de : {(G ;5) ; (C, 1)}

Donc : les points H ; C et G sont alignés

En effet : H le barycentre de : {(G ;5) ; (C, 1)}

Donc : $5\overrightarrow{HG}+1\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HG}}$ et $H\in(CG)$

b) Montrons que : les points H ; I et J sont alignés

Il suffit de trouver une relation barycentrique entre : H ; I et J ??????

Analysons notre problème :

I le milieu du segment $[AB]$ donc : I est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (B ; 1)

J le milieu du segment $[AC]$ donc : J est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (C ; 1)

Et on a : H le barycentre de : {(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)}

Donc : H le barycentre de : {(A, 2) ; (A, 1) ; (B, 2) ; (C, 1)}

Donc : H le barycentre de : {(A, 2) ; (B, 2) ; (A, 1)) ; (C, 1)}

Donc : H le barycentre de : {(I, 4) ; (J, 2))} : d'après la Propriété d'associativité

En effet : on a : H le barycentre de : {(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)}

Donc : $3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ avec Charles on aura :

Donc : $2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

Donc : $4\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HJ}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}\right)=\vec{0}$ et comme : I est le barycentre : (A ; 1) et (B ; 1)

et J est le barycentre: (A ; 1) et (C ; 1)

Alors : $4\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$ c'est-à-dire : H le barycentre de : {(I, 4) ; (J, 2))}

Par suite : les points H ; I et J sont alignés

c) Déduisons une construction du point H :

On a : H le barycentre de : {(I, 4) ; (J, 2))} donc : H est le barycentre de : {(I, 2) ; (J, 1))} aussi

Donc : $2\overrightarrow{HI}+1\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$ Voir figure

3) La droite (AH) coupe la droite (BC) en K

Montrons que : K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)

Dans le triangle ABC on a : I le milieu du segment $[AB]$et J le milieu du segment $[AC]$

Donc : La droite (IJ) est parallèle à la droite (BC)

Dans le triangle ABK on a : I le milieu du segment $[AB]$et La droite (IH) est parallèle à la droite (BK)

Donc : H est aussi le milieu du segment $[AK]$

Donc : $\overrightarrow{KA}=2\overrightarrow{KH}$

Donc : $1\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KH}=\vec{0}$

Par suite : K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)

4) a) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que : $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MH}\right\|$

On a : H le barycentre de : {(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)}

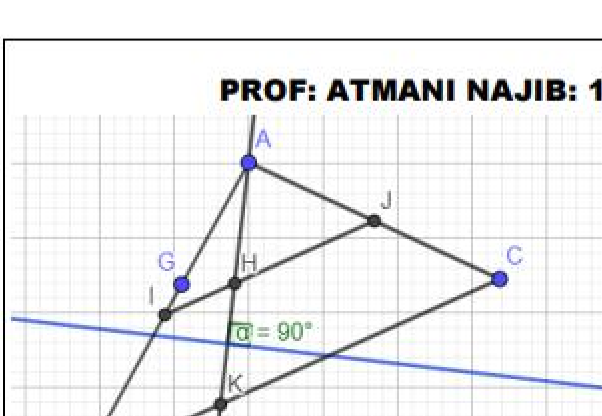
et K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MH}\right\|$

$\Leftrightarrow\left\|(3+2+1)\overrightarrow{MH}\right\|=6\left\|(1+(-2))\overrightarrow{MK}\right\|\Leftrightarrow|6|\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=6\times|-1|\left\|\overrightarrow{MK}\right\|\Leftrightarrow 6MH=6MK\Leftrightarrow MH=MK$

Donc l'ensemble des points est la droite médiatrice du segment $[HK]$



b) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que : $3MA^2+2MB^2=50$

On a : G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)

$3MA^2+2MB^2=100\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2=50\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2=50$

$\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2=50$

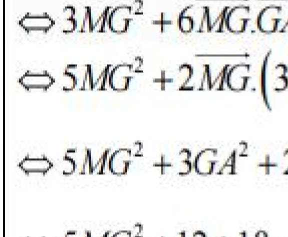
$\Leftrightarrow 3\left(\left(\overrightarrow{MG}\right)^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{GA}\right)^2\right)+2\left(\left(\overrightarrow{MG}\right)^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+\left(\overrightarrow{GB}\right)^2\right)=50$

$\Leftrightarrow 3MG^2+6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+3GA^2+2MG^2+4\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+2GB^2=50$

$\Leftrightarrow 5MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}\right)+3GA^2+2GB^2=50\Leftrightarrow 5MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(\vec{0}\right)+3GA^2+2GB^2=50$

$\Leftrightarrow 5MG^2+3GA^2+2GB^2=50$ et on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\boxed{AG=\frac{2}{5}AB=\frac{2}{5}\times 5=2}$ et $\boxed{BG=AB-AG=5-2=3}$

$\Leftrightarrow 5MG^2+12+18=50\Leftrightarrow 5MG^2=50-30\Leftrightarrow 5MG^2=20\Leftrightarrow MG^2=4\Leftrightarrow MG=2$



Exercice2 : (5pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

ABC un triangle ; I , J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BC}$; $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) Le plan (P) est rapporté au repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

a) Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{BI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) Dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $A(0;0)$et $B(1;0)$ et $C(0;1)$

a) On a : $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ donc : $8\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{CA}$

Donc : $8\overrightarrow{AJ}=-7\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$

Donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) La droite (IK) passe par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IK}$

Et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc : $\begin{cases} x_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 1-\frac{3}{2}\times 0}{-1}=-\dfrac{1}{2}\\ y_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 0-\frac{3}{2}\times 1}{-1}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Et on a : $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ Donc : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$

Donc : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est : $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+c=0$

$I\in(IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0\Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$

Donc : (IK): $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0$ c'est-à-dire :(IK): $15x-9y+21=0$

c) Pour Montrer que les points I et J et Ksont alignés il suffit de montrer que $J\in(IK)$

On a : (IK): $15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$ et on a : $15\times 0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

Par suite : $J\in(IK)$

Donc : les points I et J et K sont alignés.

Exercice3 : (4 pts) : $(2\text{pt}+2\text{pt})$

le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$orthonormé. Soient les points $A(2;3)$ $B(0;1)$; $C(-4;5)$; $E(5;2)$et $F(2;4)$

1) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

2) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

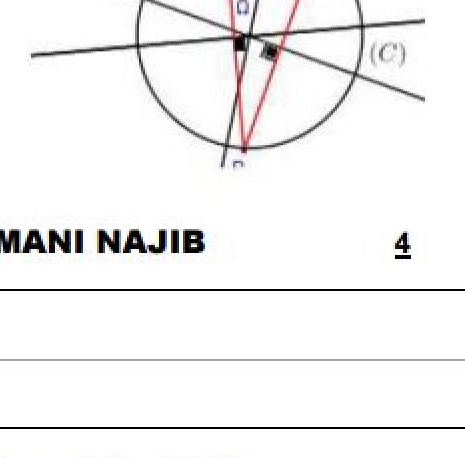
Solution : 1) Soient $I(1;2)$ et $J(-1;4)$ le milieu respectivement des segments : $[AB]$ et $[AC]$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$donc (Δ) passe par $I(1;2)$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (Δ)

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$ donc une équation de (Δ) est : (Δ): $-2(x-1)-2(y-2)=0$

Donc : (Δ): $-2x+2-2y+4=0$ donc (Δ): $-2x-2y+6=0$

Donc : (Δ): $x+y-3=0$ (après simplifications)



Et soit (Δ')la médiatrice de $[AC]$donc (Δ')passe par $J(-1;4)$et $\overrightarrow{AC}$ un vecteur normal a (Δ')et on a : $\overrightarrow{AC}(-6;2)$ donc une équation de (Δ')est : (Δ'): $-6(x+1)+2(y-4)=0$ donc : (Δ'): $3x-y+7=0$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (Δ')

on va donc résoudre le système : $\begin{cases}(\Delta): x+y-3=0\\(\Delta'): 3x-y+7=0\end{cases}$

Et la solution de ce système est : $(-1;4)$ donc $\Omega(-1;4)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r=A\Omega=\sqrt{(-1-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

(C): $x^2+y^2+2x-8y+7=0$

2) Déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme :(C'): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

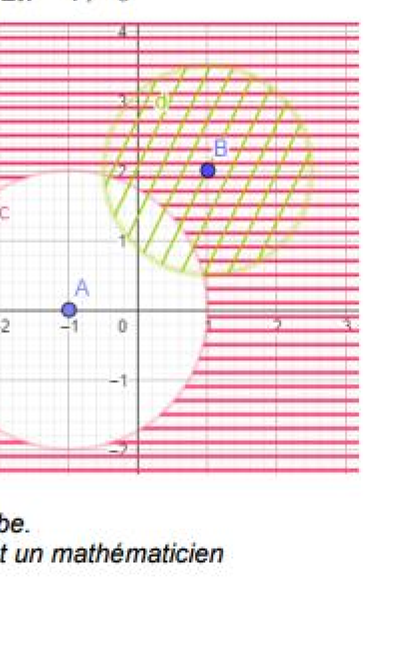
Et on a : $O\in(C')\Leftrightarrow c=0$

$E(5;2)\in(C')\Leftrightarrow 25+4-10a-4b=0$; $F(2;4)\in(C')\Leftrightarrow 4+16-4a-8b=0$

On va donc résoudre le système : $\begin{cases}10a+4b=29\\a+2b=5\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{19}{8}\\b=\frac{21}{16}\\c=0\end{cases}$

Et l'équation du cercle est : (C'): $x^2+y^2-\frac{19}{4}x-\frac{21}{8}y=0$

Exercice4 : (3 pts) : Résoudre graphiquement le système : $(S)\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}\prec 0\\x^2+y^2+2x-4\succ 0\end{cases}$



Solution : $x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre B (1,2) et de rayon $r=\frac{3}{2}$

$x^2+y^2+2x-4=0$ Est l'équation du cercle $(\mathcal{C}')$ de centre A (−1,0) et de rayon $r'=2$.

L'ensemble des points M qui vérifient (S)est l'intersection de l'extérieur de $(\mathcal{C}')$ et de l'intérieur de $(\mathcal{C})$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien