http://www.xriadiat.com **DS1: B** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Exercice1 : $(6,5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Soient deux points A et B tels que : $AB=10$

1) Construire C, barycentre du système (A ; 2), (B ; 3)

2) Construire D, barycentre du système (A ; 3), (B ; 2)

3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10$

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

5) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+3MB^2=100$

Solution : 1) C : barycentre du système (A ; 2), (B ; 3) donc : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ Voir figure

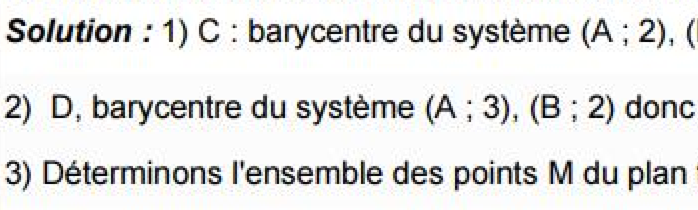
2) D, barycentre du système (A ; 3), (B ; 2) donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ Voir figure

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10 \Leftrightarrow \left\|(2+3)\overrightarrow{MC}\right\|=10 \Leftrightarrow 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|=10 \Leftrightarrow MC=2$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre C et de rayon : $r=2$



4) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

Puisque :C, barycentre du système (A ; 2), (B ; 3)

2) D, barycentre du système (A ; 3), (B ; 2)

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left\|(2+3)\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|(2+3)\overrightarrow{MD}\right\| \Leftrightarrow 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|=5\left\|\overrightarrow{MD}\right\| \Leftrightarrow MC=MD$

Donc l'ensemble des points est la droite médiatrice du segment $[CD]$

5) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+3MB^2=k$

Soit *G* = *Bar* {(*A*, 1); (*B*, 3)} donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow AG=\frac{3}{4}AB \Rightarrow AG=\frac{3}{4}\times 10=\frac{15}{2}=7.5$

Et $BG=\frac{1}{4}\times 10=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5.$

$\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2=100 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2=100$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MG}\right)^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{GA}\right)^2+3\left(\left(\overrightarrow{MG}\right)^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+\left(\overrightarrow{GB}\right)^2\right)=100$

$\Leftrightarrow MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+GA^2+3MG^2+6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+3GB^2=100$

$\Leftrightarrow 4MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB}\right)+GA^2+3GB^2=100$

$\Leftrightarrow 4MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB}\right)+GA^2+3GB^2=100$ or : $\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4MG^2+GA^2+3GB^2=100$

$\Leftrightarrow 4MG^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2+3\left(\frac{5}{2}\right)^2=100$

$\Leftrightarrow 4MG^2+75=100 \Leftrightarrow 4MG^2=25 \Leftrightarrow MG^2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow MG=\frac{5}{2}$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=\frac{5}{2}$

Exercice1 : (5pts) : $(2\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

Dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ direct

Considérons les points $A(5;0)$; $B(2;1)$ et $C(6;3)$.

1) Calculer : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) En déduire la nature du triangle ABC

3) En déduire une mesure des l'angles : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)$.

Solution : 1) On sait que : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-3\times1+1\times3=-3+3=0$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{10}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{0}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=0$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-10}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-1$

2) On a : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ et $AB=AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

3) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{-\pi}{2}[2\pi]$ car : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-1$ et $\left(\overline{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{4}[2\pi]=-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice3 : $(8,5\text{pts})$: $(1,5\text{pt}+2\text{pt}+2\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$

le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

1) Montrer que (C) est *un cercle* dont on déterminera de centre Ω et le rayon R et une équation cartésienne

2) Soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A

3) Déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite : (D) : $3x-4y=0$

4) a) Soit la droite (Δ) d'équation : $y=x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

b) Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\frac{x^2+y^2}{4}\le x\le y$

Solution :1) $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=2\cos\theta\\ y-0=2\sin\theta\end{cases}$

$(x-2)^2+(y-0)^2=(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-0)^2=4\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right) \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-0)^2=2^2$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $R=2$

2) $A(-1;0)$; (C) : $(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$

On a : $(-1-2)^2+(0-0)^2-4=9-4\succ 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)

Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle $(\mathcal{C})$ et soit : $ax+by+c=0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a;b)\neq(0;0)$

Puisque (T) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ alors : $d(\Omega,(T))=R$ cad $\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$:

Et on a : $A\in(T)$ donc : $-a+c=0$ donc on trouve :

$b=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ ou $b=-\frac{a\sqrt{5}}{2}$ et l'équation cartésienne de (T) est : $2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou $2x+\sqrt{5}y+2=0$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A sont :

(T_1) : $2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou (T_2) : $2x+\sqrt{5}y+2=0$

3) (D) : $3x-4y=0$ $\quad \Omega(2;0)$

Puisque $(T)\parallel(D)$ donc on pose : (T) : $3x-4y+c=0$ et (T) tangentes au cercle $(\mathcal{C})$

Donc : $d(\Omega,(T))=R \Leftrightarrow$ cad $\frac{|6+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2 \Leftrightarrow \frac{|6+c|}{5}=2 \Leftrightarrow |6+c|=10 \Leftrightarrow 6+c=10$

Ou $6+c=-10$ c'est-à-dire : $c=4$ ou $c=-16$

Donc les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ sont : (T_1') : $3x-4y+4=0$ ou (T_2') : $3x-4y-16=0$

4)a) on va résoudre le système suivant : $\begin{cases}(x-2)^2+(y-0)^2=2^2\\ y=x\end{cases}$ donc : $y=x$ et $2x^2-4x=0$

Donc : $(x=0$ ou $x=2)$ et $y=x$

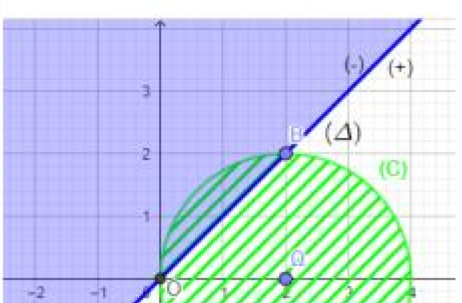
Donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points : $O(0;0)$ et $B(2;2)$

4)b) $\frac{x^2+y^2}{4}\le x\le y \Leftrightarrow \begin{cases}x-y\le 0\\ x^2+y^2-4x\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y\le 0\\ (x-2)^2+y^2-4\le 0\end{cases}$

L'inéquation : $(x-2)^2+y^2-4\le 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)

Et L'inéquation : $x-y\le 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ)

Voire la figure ci-dessus :



PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien