http://www.xriadiat.com **DS1: A** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction : Devoir surveiller n°2 sur les leçons suivantes :

BARYCENTRE et TD-PRODUIT SCALAIRE DANS V_2

Durée :2 heures

Exercice1 : (5pts) : $(1pt+1pt+1pt+1pt+1pt)$

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe.
Soit H le barycentre du système pondéré :{(A, 2) ; (B, 5); (C, -1) }
Soit K le barycentre du système pondéré :{(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}
Soit E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}

1)Montrer que $\overline{BE}=-\frac{1}{4}\overline{BC}$ et Construire E

2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)} et Construire H
3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
b) En déduire que $(AK)\parallel(DH)$

Solution :1) On sait que : si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$\overline{ME}=\frac{1}{4}\left(5\overline{MB}-\overline{MC}\right)$

Pour : M=B on a : $\overline{BE}=-\frac{1}{4}\overline{BC}$ et on peut Construire E

2) On a : E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)} et $5+(-1)=4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {(A, 2); (E, 4) }
et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré :{(A, 1) ; (E, 2)}

On sait que si : M est un point quelconque dans le plan (P) on a : $\overline{MH}=\frac{1}{3}\left(2\overline{ME}+\overline{MA}\right)$

Pour : M=A on a : $\overline{AH}=\frac{2}{3}\overline{AE}$ et on peut Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système
Pondéré {(D, -6); (E, 4) }
Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré :{(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?
Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
Pour tout point M du plan (P) on a : $-\overline{MK}=-3\overline{MD}+2\overline{ME}$

Donc : $3\overline{MD}=\overline{MK}+2\overline{ME}$
Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
4) b) Pour tout point M du plan (P) on a : $3\overline{MH}=2\overline{ME}+\overline{MA}$ et $3\overline{MD}=2\overline{ME}+\overline{MK}$

Donc : $3\overline{DH}=3\overline{MH}-3\overline{MD}$: $3\overline{DH}=3\left(\overline{MH}-\overline{MD}\right)$

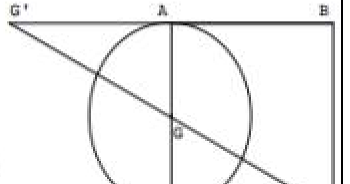
Donc : $3\overline{DH}=\overline{MA}-\overline{MK}$
Donc : $3\overline{DH}=-\overline{AK}$ Donc : $(AK)\parallel(DH)$

Exercice2 : (2pts) : $(1{,}5pt+0{,}5pt)$ ABCD est un carré.

1) Quel est l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$?

2) Représenter cet ensemble (E)
Solution :1) Notons : G le barycentre de (A, 2), (B, -1) et (C, 1).
On a, pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$

$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=AB\Leftrightarrow 2MG=AB\Leftrightarrow MG=\frac{1}{2}AB$



L'ensemble (E)des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$ est

donc le cercle de centre G et de rayon : $\frac{1}{2}AB$

2) Représentons cet ensemble (E) : Pour construire G, on commence par construire G' le barycentre des points (A, 2) et (B, – 1). Puis par associativité du barycentre, G est le barycentre des points :
(G', 1) et (C, 1) donc le milieu de [CG'].

Exercice3 : (5,5pts) : $(1{,}5pt+1pt+1pt+1pt+1pt)$

Dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Considérons les points $A(1;-1)$; $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

3) Calculer la surface du triangle ABC
4) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5) Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Solution :1) on a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-3)+0\times3=-9$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}3&-3\\0&3\end{vmatrix}=9$

2)soit α une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{3^2+0^2}=3$ et $AC=3\sqrt{2}$

Donc : $\cos\alpha=\frac{-9}{9\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\cos\alpha=-\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$

Donc : $\cos\alpha=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\alpha=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\cos\alpha=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\alpha=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Donc : $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

3) On a : $S=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{9}{2}cm^2$

4) Soit (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire à (BC) passant par A

Donc : $\overrightarrow{BC}(-6,3)$ un vecteur normal a (Δ)

Donc : $(\Delta):-6x+3y+c=0$ et on a $A(1;-1)\in(\Delta)$

Donc : $-6\times1-3+c=0\Leftrightarrow c=9$
Donc : $(\Delta):-6x+3y+9=0$ Alors : $(\Delta):2x-y-3=0$

4) Soit (D) la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Pour Chaque point $M(x,y)$ de la droite (D) on a : $d\left(M;(AB)\right)=d\left(M;(AC)\right)$

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB):

On a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ un vecteur directeur de de la droite (AB): $\overrightarrow{AB}(-b;a)$

$(AB):ax+by+c=0$ avec : $b=-3$ et $a=0$

Donc : $(AB):-3y+c=0$ et on a $A(1;-1)\in(AB)$

Donc : $3+c=0\Leftrightarrow c=-3$
Donc : l'équation cartésienne de (AB) est : $(AB):-3y-3=0$ c'est-à-dire : $(AB):y+1=0$

b) Déterminons une équation cartésienne de la droite (AC):

On a : $\overrightarrow{AC}(-3;3)$ un vecteur directeur de de la droite (AC): $\overrightarrow{AC}(-b;a)$

$\overrightarrow{AC}:ax+by+c=0$ avec : $b=3$ et $a=3$

Donc : $(AC):3x+3y+c=0$ et on a $A(1;-1)\in(AC)$

Donc : $3-3+c=0\Leftrightarrow c=0$
Donc : l'équation cartésienne de (AC) est : $(AC):3x+3y=0$ c'est-à-dire : $(AC):x+y=0$

$d\left(M;(AB)\right)=d\left(M;(AC)\right)\Leftrightarrow\frac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}|y+1|=|x+y|$

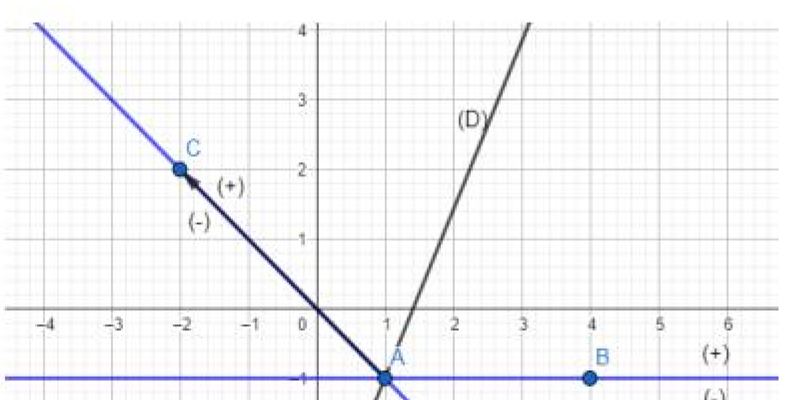
On remarque que (D) se trouve dans le demi plan tel que : $\begin{cases}y+1\geq0\\x+y\geq0\end{cases}$

Donc : $\sqrt{2}(y+1)=x+y$

Donc : l'équation cartésienne de (D)est :

$\begin{cases}x+\left(1-\sqrt{2}\right)y-\sqrt{2}=0\\y+1\geq0\end{cases}$;

(D) est une demie droite



Exercice4 : (7,5pts) : $(1pt+1{,}5pt+1pt+1{,}5pt+1pt+1{,}5pt)$

4 le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C_m) L'ensemble des points $M(x;y)$

du plan tel que : $(C_m):x^2+y^2-2mx+2y+2m=0$ avec m Paramètre réel

1) Déterminer l'ensemble (C_1)

2) a) Montrer que $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$ (C_m) est *un cercle* dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) Déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) c) Montrer que tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0);(C_2);(C_3)$

3) a) Montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est tangente a toutes les *cercles* (C_m)

3) b) Soit : $m\succ\frac{-3}{2}$ et $m\neq1$ et le point $A(0;1)$; Vérifier que A est à l'extérieur des *cercles* (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux Cercles (C_m) .

Solution :1) (C_1) ? Pour $m=1$ on a :$(C_1):x^2+y^2-2x+2y+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ *et* $y+1=0\Leftrightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : (C_1) est le point $E(1;-1)$

2) a) $(C_m):x^2+y^2-2mx+2y+2m=0\Leftrightarrow(x-m)^2+(y+1)^2=(m-1)^2$

Donc : (C_m) est *un cercle* de centre $\Omega_m(m;-1)$ et de rayon $R_m=|m-1|$ $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b) On pose : $x=m$ et $y=-1$ avec $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

On a donc : l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$ est la droite d'équation : $y=-1$

Privé du point $E(1;-1)$

2) b) $I(a;b)\in(C_m)$ $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ma+2b+2m=0\Leftrightarrow m(2-2a)+a^2+b^2+2b=0$ $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-2a=0\\a^2+b^2+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1$ et $b=-1$ Donc : tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe $I(1;-1)$

3) a) L'équation de (Δ) est : $x+0y-1=0$ et $d\left(\Omega_m,(\Delta)\right)=\frac{|m-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|m-1|=R_m$

Donc : la droite (Δ) est tangente a toutes les *cercles* (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

3) b) On a : $x^2+y^2-2mx+2y+2m=2m+3$

Et puisque : $m\succ\frac{-3}{2}$ alors : $x^2+y^2-2mx+2y+2m\succ0$ donc A est à l'extérieur des *cercles* (C_m)

Montrons que : $d\left(\Omega_m,(AI)\right)=\frac{|2m-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}R_m$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m) car : $\frac{2}{\sqrt{5}}R_m\neq R_m$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien