1ème BAC Sciences Mathématiques

PROF : ATMANI NAJIB http://www.xriadiat.com **Devoirn°01** 1ème tranche

Durée : 02 heures

Note :

- ✓ *Aucun document ni calculette n'est autorisé .*
- ✓ *La qualité de la rédaction , la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies .*
- ✓ *Le sujet comporte deux pages et tous les exercices sont indépendants .*

○ Exercice 01:(02 points)

1 **1)-** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(\mathrm{E}) : 2x^2 + 3x - 2 = 0$.

1 **2)-** Déduire la valeur de vérité de la proposition : $p : (\exists n \in \mathbb{N}) ; 2n^2 + 3n - 2 = 0$.

○ Exercice 02:(03 points)

⇨ On considère la proposition : $q : \forall x \in \mathbb{R} ; (x < 2 \Rightarrow x^2 < 4)$.

1,5 **1)-** Ecrire la négation de q .

1,5 **2)-** En utilisant un raisonnement par contre exemple , montrer que q est fausse .

○ Exercice 03:(03 points)

1,5 **1)-** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), x + \frac{1}{x} \geq 2$.

1,5 **2)-** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}), x^5 - x^3 + x \geq 3 \Rightarrow x^6 \geq 5$.

○ Exercice 04:(02 points)

✓ En utilisant un raisonnement par disjonction des cas (ou une récurrence)

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $5n^3 + 11n^2 + 3$ est entier impair . 2

○ Exercice 05:(02 points)

⇨ Soient x et y deux nombres réels strictement positifs .

✓ Montrer par l'absurde que : $\left(x \leq \sqrt{2}\right)$ *ou* $\left(\frac{1}{y} \leq \sqrt{2}\right)$ *ou* $\left(y + \frac{1}{x} \leq \sqrt{2}\right)$. 2

○ Exercice 06:(03 points)

⇨ On pose : $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1,5 **1)-** Calculer S_1 , S_2 et S_3 .

1,5 **2)-** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

○ Exercice 07:(05 points)

1,5 **1)-** Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^{*+}), \sqrt{2a+1} \leq a+1$.

1,5 **2)-** Montrer que : $\left(\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2\right), \dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

3)- Soients x et y deux nombres réels strictement positifs .

2 ✓ Montrer que : $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}}{2} \leq x+y+1$. (appliquer **2)** puis **1)**)

○ Exercices bonus:

○ Exercice 01:

⇨ Soients x et y deux nombres réels strictement positifs .

2 ✓ Prouver par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), xy \leq \dfrac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^n+y^n}$.

○ Exercice 02:

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

2 $$(\text{n}+1 \text{ est un carré parfait}) \Rightarrow (14\text{n}+14 \text{ est somme de } 3 \text{ carrés parfait})$$

(Indication : écrire en premier 14 comme somme de 3 carrés parfait) .

○ Exercice 03:

⇨ Soients x_1, x_2 , x_3 , x_4 et x_5 cinq nombres réels tels que :

$$|x_2 - x_1| = 2|x_3 - x_2| = 3|x_4 - x_3| = 4|x_5 - x_4| = 5|x_1 - x_5| .$$

3 ✓ Prouver que ces nombres réels sont tous égaux (raisonner par l'absurde) .