Exercice 1: 4, 5pts

Compléter le tableau suivant :

Proposition (P)	La négation de (P)	La vérité de (P)
$(\forall n\in\mathbb{N}):\sqrt{3n+4}\notin\mathbb{N}$		
$(\forall x\in\mathbb{R}):x^2-2x+1>0$		
$(\forall x\in]0;1[):\dfrac{x}{1-x}<1$		

Exercice 2: 6pts

2pts 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x=\sqrt{1+x}$

2pts 2) En utilisant le raisonnement par équivalences successives, montrer que:

$$(\forall x\in\mathbb{R}):\sqrt{x^2+1}-|x|\leq 1$$

2pts 3) Soit a un nombre réel positif. En utilisant le raisonnement par contraposé, montrer que :

$$3<a^4+8a^3+18a^2+8a\Rightarrow\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{2}}}<a+2$$

Exercice 3: 3, 5 pts

Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que: $ab+bc+ca=1$

1,5pts 1) Montrer que: $a^2+b^2\geq 2ab$, puis déduire que : $a^2+b^2+c^2\geq 1$

2pts 2) Montrer par l'absurde que : $a+b\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ou $b+c\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ou $c+a\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 4: 2pts

Montrer que : $(\forall y\in[2;+\infty[)(\exists x\in\mathbb{R}):x^2+2xy+4=0$

Exercice 5: 4pt

1,5pt 1) a-Soit a un réel tel que $a>0$. Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N}):(1+a)^n\geq 1+an$

0.5pt b- Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geq 2$

2pt 2) Montrer que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\dfrac{5^{n+1}+2\times 3^n+1}{8}\in\mathbb{N}$

Exercice 6: 2pts (Bonus)

Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs $a_1;a_2;....et\ a_n$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geq n^2$$