Devoir surveillé

Durée 2h

Exercice 1 .

1. *Soient* a, b, x *et* y *des réels non nuls.*
   Montrer que : $ax + by = 1 \implies \dfrac{1}{x^2 + y^2} \leq a^2 + b^2$

2. *Montrer que :*

$$\forall (a, b) \in (]0, +\infty[)^2, \quad a^2 = b + 1 \implies \frac{\sqrt{a - \sqrt{b}} + \sqrt{a + \sqrt{b}}}{\sqrt{2(a+1)}} = 1$$

3. *Soient* a, b *et* c *des réels.*

   a) *Vérifier que :* $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.

   b) *Montrer que :*

$$|ab| \succ \frac{c^2}{2} \implies |a - b| \succ c \quad ou \quad |a + b| \succ c$$

4. *Montrer que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^2, \quad y \neq \frac{-3}{4}x \implies \frac{x - y}{x + y} \neq 7$$

5. n *et* m *deux entiers naturels tels que* n *est impair et* m *est pair. Montrer que :* $\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 2 .

1. *Montrer que :*

$$\forall (a, b) \in ([0, +\infty[)^2, \quad \sqrt{a+1} - \sqrt{b+1} < \sqrt{a} - \sqrt{b} \iff a \succ b$$

2. *Montrer que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \iff x = y = 0$$

3. *Soient* a *et* b *deux réels non nuls.*

   a) *Montrer que :* $\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = \left(b + \dfrac{1}{b}\right) \iff \left(a = b \quad ou \quad a = \dfrac{1}{b}\right)$

   b) *Déduire l'ensemble des solutions de l'équation* $(E) : x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4}$.

Exercice 3 .

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On pose* : $u_n = (1+1)^2 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \times ... \times \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

   a) *Montrer que* : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$.

   b) *Montrer que* : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \succ 2n+3$.

2. *Montrer que* : $(\forall n \in \mathbb{N})$, 6 *divise* $n(n+1)(n+2)$.

Exercice 4 .

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ *le système suivant* :

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - 2 = 0 \\ x^2 + xy - y + y^2 = 0 \end{cases}$$