

PROF : ATMANI NAJIB

Devoir surveillé n°1

1er Bac Sc Mat

Durée: 2 heures 30 min

1,5

❖ Exercice n° 1:

✓ montrer que la proposition suivante est fausse:

$$(\forall n \in \mathbb{N}), 2^n + 3^n \text{ est un nombre premier.}$$

❖ Exercice n° 2:

On travaille avec l'ensemble $E = \{0, 1, 4, 7\}$ et on considère les deux Propositions suivantes:

$$p: (\forall x \in E)(\exists y \in E), x < y \text{ et } q: (\exists x \in E)(\forall y \in E), y \leq x$$

1
0,5

✓ La proposition p est-elle vraie? même question pour q .
Voyez-vous un lien entre p et q ?

❖ Exercice n° 3:

1

1)- Soient x et y deux nombres réels positifs, montrer que:

$$(x \neq 1 \text{ ou } y \neq 1) \Rightarrow x + y + 2 \neq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

1

2)- Soient a, b, c et d quatre nombres réels, l'implication suivante:

$$(a \neq b \text{ et } c \neq d) \Rightarrow a + c \neq b + d$$

Est-elle vraie ou fausse? justifier votre réponse.

❖ Exercice n° 4:Soient a, b, c trois nombres réels tels que:

$$abc = 1 \text{ et } a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

1,5

✓ Montrer qu'au moins un des nombres réels a, b, c est égal à 1.❖ Exercice n° 5:Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs tels que:

$$(i): abc > 1 \text{ et } (ii): a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

✓ A l'aide d'un raisonnement par l'absurde montrer:

1

1)- qu'aucun des nombres réels a, b, c ne peut être égal à 1.

1

2)- qu'au moins un des réels a, b, c est strictement supérieur à 1.

1

3)- qu'au moins un des réels a, b, c est strictement inférieur à 1.

1

✓ Donner un exemple numérique de triplet (a, b, c) vérifiant
Les inégalités (i) et (ii).

❖ Exercice n° 6:✓ Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante:

$$(E): \cos(2x) + \sin(7x) = -2.$$

1,5

❖ Exercice n° 7:

2

✓ Trouver tous les couples (x, y) de nombres réels, solutions du

$$\text{Système suivant: } (S): \begin{cases} |x| + 2y = 6 \\ 2|x - 1| - y = 4 \end{cases} .$$

❖ Exercice n° 8:

PROF : ATMANI NAJIB

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose:

$$S_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \times (2n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1) \times (2k+1)}$$

0,75

1)- Donner S_1, S_2 et S_3 sous forme de fractions irréductibles.

1

2)- Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \frac{n}{2n+1}$.❖ Exercice n° 9:1)- Soient a, b, c des nombres réels quelconques.

0,75

a)- Montrer que: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

0,75

b)- En déduire que: $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.2)- Montrer que quelque soient les nombres réels a, b, c et x, y, z

0,75

$$\text{On a: } (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \times (x^2 + y^2 + z^2).$$

3)- Soient x, y et z des nombres réels positifs tel que: $x + y + z = 1$.

0,75

a)- Montrer que: $x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} \leq \sqrt{xy + yz + zx}$ (utiliser 2)).

0,75

b)- En déduire que: $x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.➤ Exercices bonus:❖ Exercice n° 1:

2

✓ Montrer qu'ils n'existent pas d'entiers naturels a, b et c tel que:

$$(E): a^2 + b^2 - 8c = 6.$$

❖ Exercice n° 2:

2

✓ Trouver la valeur minimale de l'expression $A = \sqrt{x+y} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right)$ Ou x et y sont deux nombres réels strictement positifs.❖ Exercice n° 3:Soient a_1, a_2, \dots et a_n des nombres réels strictement positifs

$$\text{Vérifiant: } \prod_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2^{n^2+n}} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

2

✓ Montrer que: $\prod_{k=1}^n (1 + 2^{2k} a_k) \geq 2^n$, dans quel cas a-t-on l'égalité?❖ Exercice n° 4:

2

✓ Montrer que:

$$(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{**})^2), \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \leq \frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$