Devoir surveillé n°1

Exercice 1 (4.5Points)

Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes puis écrire sa négation

1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x^2 + x + 1 \leq 0$

2) $P_2 : (\exists n \in \mathbb{N})\ ;\ n^2 - 4n = -3$

3) $P_3 : (\forall x > 0)\ ;\ x + \frac{9}{x} \geq 6$

4) $P_4 : (\forall a \in \mathbb{R}_+)(\forall b \in \mathbb{R}_+)\ ;\ \frac{a}{5+a} = \frac{b}{5+b} \Rightarrow a = b$

Exercice 2 (10 Points)

1. Montrer que : $x \neq 4 \Rightarrow \frac{x+6}{x-2} \neq 5$ pour tout réel $x \neq 2$
2. Montrer que : $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b} \Leftrightarrow a = b$ pour tout réels a et b distincts de -1.
3. Montrer que : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \sqrt{x+8} + \sqrt{x+3} = 5 \Leftrightarrow x = 1$
4. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}_+)(\forall b \in \mathbb{R}_+)\ ;\ a \neq b \Rightarrow \frac{a^2+5}{a^2+2} \neq \frac{b^2+5}{b^2+2}$.
5. Montrer que : $(\forall y \in]1;+\infty[)\ (\exists x \in]2;+\infty[)\ ;\ \sqrt{\frac{x}{x-2}} = y$
6. Montrer que : 7 divise $3^{2n} - 2^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
7. Etablir que : $\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $(\forall q \in \mathbb{R} - \{1\})$
8. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists (a_n;b_n) \in \mathbb{N}^2)\ ;\ (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$

Exercice 3 (2 Points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

1. Montrer que f est majorée par le nombre $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est minorée par le nombre 0.

Exercice 4 (1.5 Points)

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 4$

Montrer que g admet une valeur minimale sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 1.5 Points)

Soient x et y deux réels de l'intervalle $]-1;1[$.

Montrer que : $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$.