Contrôle n°: 1

Exercice1(5pts):

On pose $I=[0,1[$ et $J=]1,+\infty[$ ، soit h l'application de $I\cup J$ vers IR telle que : $h(x)=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$.

1) h est-elle injective ? surjective ?
2) Soit f la restriction de h sur J et g la restriction de h sur I.

   a) Montrer que : $(\forall x\in I-\{0\})$; $g(x)=-f(\dfrac{1}{x})$.

   b) Montrer que f est une bijective de J vers J.

   c) Montrer que g est une bijection de I vers $]-\infty,-1[$ et que sa bijection réciproque g^{-1} est définie par : $\begin{cases} g^{-1}(0)=0 \\ g^{-1}(x)=\dfrac{1}{f^{-1}(0)} \quad ; \quad x<-1 \end{cases}$.

Exercice2(7pts):

E est un ensemble non vide, .Pour toute partie A de E, on définit l'application f_A (appelée fonction caractéristique de la partie A) de E vers $\{0,1\}$ telle que pour x de E:

$$\begin{cases} f_A(x)=1 \ ; \ x\in A \\ f_A(x)=0 \ ; \ x\notin A \end{cases}$$

Montrer que pour tout A et B de $P(E)$:

a) $A\subset B \Leftrightarrow f_A\le f_B$

b) $A=B \Leftrightarrow f_A=f_B$

c) $f_A^2=f_A$

d) $f_{A\cap B}=f_A\times f_B$

e) $f_{\overline{A}}=1-f_A$

f) $f_{A\cup B}=f_A+f_B-f_A\times f_B$

g) $f_{A-B}=f_A(1-f_B)$

h) $f_{A\Delta B}=f_A+f_B-2f_A\times f_B$

i) $f_{A\Delta B}=(f_A-f_B)^2=|f_A-f_B|$

Exercice3(8pts):

E est un ensemble non vide . A et B deux parties non vide de E . On considère les applications f , g et h définie par:

$$h:P(E)\to P(E),\quad X\mapsto \overline{X}$$

$$g:P(A)\times P(\overline{A})\to P(E),\quad (X;Y)\mapsto X\cup Y$$

$$f:P(E)\to P(A)\times P(\overline{A}),\quad X\mapsto (A-X;\overline{A}-X)$$

1) Montrer que l'application h est bijective et que $h^{-1}=h$.

2) Montrer que $gof=h$.

3) Montrer que l'application g est injective et surjective.

4) En déduire que l'application f est bijective et déterminer f^{-1}.